電磁気学

Re_menal

2021 年 6 月 25 日

目次

この文書では，まず初めに電磁現象の基礎方程式であるマクスウェル方程式を定式化し，電磁場の理論のゲージ対称性を述べる．その後，電磁場の理論がゲージ場の理論の例となっていることを見る．最後に，マクスウェル方程式を，4 次元空間の概念を用いて非常に簡潔な形に書き換える．ニュートン力学の pdf の数学に関する補足の内容は前提知識として仮定する．

2 章を除いては，全体を通して，単に「（計量）ベクトル空間」，「内積空間」といったときにはそれぞれ有限次元（計量）実ベクトル空間，有限次元実内積空間を意味するとする．また，写像についてはそのとき必要なだけの連続性，微分可能性を仮定する．

1　マクスウェル方程式とゲージ対称性

V を 3 次元内積空間，$D \subset V$ を V の開集合，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．また，簡単のために D は原点を中心とする星型集合（定義 69）であると仮定する．$\bigwedge^p V^*$ と $\bigwedge^p V$ を同型写像 $i_{*,p}$（A.3.1 参照）により同一視し，$A(D,V)$ に関する外微分作用素を d，余微分作用素を δ とする．

1.1　マクスウェル方程式

c で**真空中の光速**，ε_0 で**真空中の誘電率**を表し，$\hat{\varepsilon_0} \in \bigwedge^3 V$ を $\|\hat{\varepsilon_0}\| = \varepsilon_0$ なるものとする．この $\hat{\varepsilon_0}$ を**誘電率テンソル**という．

仮定 1. 次の**マクスウェル方程式**と呼ばれる連立方程式を満たすような 4 つの写像 $\boldsymbol{E} : I \times D \to V$, $\boldsymbol{B} : I \times D \to \bigwedge^2 V$, $\hat{\rho} : I \times D \to \bigwedge^3 V$, $\boldsymbol{J} : I \times D \to \bigwedge^2 V$ が存在する：

$$\hat{\varepsilon_0}\delta\boldsymbol{E} = -\hat{\rho} \tag{M1}$$
$$d\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{M2}$$
$$d\boldsymbol{B} = 0 \tag{M3}$$
$$c^2\hat{\varepsilon_0}\delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \hat{\varepsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{M4}$$

ここで，(M4) における $\hat{\varepsilon_0}\delta\boldsymbol{B}$, $\hat{\varepsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ は演算積（定義 45）を表す．

定義 2. (i) マクスウェル方程式を満たす写像 $\boldsymbol{E} : I \times D \to V$ を**電場**という．
(ii) マクスウェル方程式を満たす写像 $\boldsymbol{B} : I \times D \to \bigwedge^2 V$ を**磁場**という．
(iii) マクスウェル方程式を満たす写像 $\hat{\rho} : I \times D \to \bigwedge^3 V$ を**電荷密度**という．
(iv) マクスウェル方程式を満たす写像 $\boldsymbol{J} : I \times D \to \bigwedge^2 V$ を**電流密度**という．
(v) 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の組 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ を**電磁場**という．

注意. マクスウェル方程式の他に，経験則として次の式が成り立つことが知られている：

$$d\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}$$

この法則を**電荷の保存則**といい，上の式を**連続の方程式**という．

1.2　電磁ポテンシャル

定理 3. 電磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ に対して，

$$\boldsymbol{B} = d\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E} = -d\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

を満たす写像 $\boldsymbol{A} : I \times D \to V$ と $\phi : I \times D \to \mathbb{R}$ が存在する．この $\boldsymbol{A}$ を磁場 $\boldsymbol{B}$ に対する**ベクトルポテンシャル**，ϕ を電場 $\boldsymbol{E}$ に対する**スカラーポテンシャル**という．また，$\boldsymbol{A}$ と ϕ の組 $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を**電磁ポテンシャル**という．

Proof. まず，ポアンカレの補題を (M3) に適用すれば，$\boldsymbol{B} = d\boldsymbol{A}$ なる $\boldsymbol{A} : I \times D \to V$ が存在することがわかる．

$\boldsymbol{B} = d\boldsymbol{A}$ と (M2) より，

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
d\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t} d\boldsymbol{A} &= 0 \\
d\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

を得る（外微分作用素と偏微分の交換は外微分の基底による展開からわかる）．ゆえに再びポアンカレの補題の補題より，

$$
\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -d\phi \iff \boldsymbol{E} = -d\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}
$$

を満たす $\phi : I \times D \to \mathbb{R}$ が存在する． □

定理 4. マクスウェル方程式 (M1)〜(M4) は，写像 $\boldsymbol{A} : I \times D \to V$, $\phi : I \times D \to \mathbb{R}$ に対する次の連立方程式と同値である．

$$
\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{A} + \delta d\phi\right) = \hat{\rho} \tag{M5}
$$

$$
\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + c^2 \delta d\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0} d\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{M6}
$$

Proof. マクスウェル方程式を仮定すれば前定理でみたように電磁ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ が得られる．これによる電場の表示を (M1) に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon_0}\delta\boldsymbol{E} &= -\hat{\rho} \\
-\hat{\varepsilon_0}\delta\left(d\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) &= -\hat{\rho} \\
\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{A} + \delta d\phi\right) &= \hat{\rho}
\end{aligned}
$$

となり (M5) を得る（余微分作用素と偏微分の交換は余微分の基底による表示からわかる）．同様に，電磁ポテンシャルによる電場と磁場の表示を (M4) に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
c^2\hat{\varepsilon_0}\delta\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{J} + \hat{\varepsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
c^2\hat{\varepsilon_0}\delta d\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(d\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\
\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + c^2\delta d\boldsymbol{A}\right) &= \boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0} d\frac{\partial \phi}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

よって (M6) が得られた．

次に，(M5),(M6) を満たす $(\boldsymbol{A}, \phi)$ が与えられたとする．このとき，写像 $\boldsymbol{B} : I \times D \to \bigwedge^2 V$ と $\boldsymbol{E} : I \times D \to V$ を定理 3 の式で定義すれば (M2),(M3) を満たす．さらに，上の 2 つの式変形を逆に追うことで (M1),(M4) を満たすこともわかり，結局マクスウェル方程式を得る． □

1.3　ゲージ対称性

集合 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} = \{(\boldsymbol{A}, \phi) \mid \boldsymbol{A} : I \times D \to V,\ \phi : I \times D \to \mathbb{R}\ \text{であり},\ (\boldsymbol{A}, \phi)\ \text{は (M5),(M6) を満たす}\ \}$$

と定義する．

補題 5. $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を電磁ポテンシャルとする．このとき，任意の写像 $\Lambda : I \times D \to \mathbb{R}$ と $C : I \to \mathbb{R}$ に対して，写像 $G_{\Lambda,C} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を $G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A}, \phi) = \left(\boldsymbol{A} + d\Lambda, \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + C\right)$ によって定めることができる．この $G_{\Lambda,C}$ を**第 2 種ゲージ変換**という．

Proof. $(\boldsymbol{A}', \phi') \coloneqq G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A}, \phi)$ が (M5) と (M6) を満たすことを示せばよい．

(M5)：

$$\begin{aligned}
&\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta \boldsymbol{A}' + \delta d \phi'\right) \\
&= \hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta(\boldsymbol{A} + d\Lambda) + \delta d\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + C\right)\right) \\
&= \hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta \boldsymbol{A} + \delta d \phi\right) \\
&= \hat{\rho}.
\end{aligned}$$

よって (M5) が成り立つ．

(M6)：

$$\begin{aligned}
&\hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}'}{\partial t^2} + c^2 \delta d \boldsymbol{A}'\right) \\
&= \hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{A} + d\Lambda) + c^2 \delta d(\boldsymbol{A} + d\Lambda)\right) \\
&= \hat{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + c^2 \delta d \boldsymbol{A}\right) + \hat{\varepsilon_0} d \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0} d \frac{\partial \phi'}{\partial t} \\
&= \boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0} d \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + C\right) \\
&= \boldsymbol{J} - \hat{\varepsilon_0} d \frac{\partial \phi}{\partial t} + \hat{\varepsilon_0} d \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

ゆえに (M6) が成り立つ．　□

定義 6. $\mathcal{P}$ における関係 $\sim$ を，$(\boldsymbol{A}, \phi), (\boldsymbol{A}', \phi') \in \mathcal{P}$ に対して，ある写像 $\Lambda : I \times D \to \mathbb{R}$ と $C : I \to \mathbb{R}$ が存在して $(\boldsymbol{A}', \phi') = G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A}, \phi)$ が成り立つとき $(\boldsymbol{A}, \phi) \sim (\boldsymbol{A}', \phi')$ となるものとして定義する．

定理 7. 上の関係 $\sim$ は $\mathcal{P}$ における同値関係である．

Proof.（反射律）：$(\boldsymbol{A},\phi)=G_{0,0}(\boldsymbol{A},\phi)$ よりわかる．

（対称律）：$(\boldsymbol{A},\phi)\sim(\boldsymbol{A}',\phi')$ とする．このとき $(\boldsymbol{A}',\phi')=G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A},\phi)$ なるスカラー場 Λ と関数 C ががある．このとき，$G_{-\Lambda,-C}(\boldsymbol{A}',\phi')=\left(\boldsymbol{A}'-d\Lambda,\phi'+\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-C\right)=(\boldsymbol{A},\phi)$ であるから $(\boldsymbol{A}',\phi')\sim(\boldsymbol{A},\phi)$ が成り立つ．

（推移律）：$(\boldsymbol{A},\phi)\sim(\boldsymbol{A}',\phi')$ かつ $(\boldsymbol{A}',\phi')\sim(\boldsymbol{A}'',\phi'')$ とする．このとき，スカラー場 Λ,Λ'，関数 C,C' が存在して $(\boldsymbol{A}',\phi')=G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A},\phi)$，$(\boldsymbol{A}'',\phi'')=G_{\Lambda',C'}(\boldsymbol{A}',\phi')$ となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}'',\phi'')&=\left(\boldsymbol{A}'+d\Lambda',\phi'-\frac{\partial\Lambda'}{\partial t}+C'\right)\\
&=\left(\boldsymbol{A}+d(\Lambda+\Lambda'),\phi-\frac{\partial}{\partial t}(\Lambda+\Lambda')+(C+C')\right)\\
&=G_{\Lambda+\Lambda',C+C'}(\boldsymbol{A},\phi).
\end{aligned}
$$

ゆえに $(\boldsymbol{A},\phi)\sim(\boldsymbol{A}'',\phi'')$ が成り立つ． □

定理 8 (ゲージ対称性)． 2 つの電磁ポテンシャル $(\boldsymbol{A},\phi)$，$(\boldsymbol{A}',\phi')$ に対して，次の 2 条件は同値である．

1. $(\boldsymbol{A},\phi)$，$(\boldsymbol{A}',\phi')$ は同じ電磁場 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ を与える．
2. $(\boldsymbol{A},\phi)\sim(\boldsymbol{A}',\phi')$ が成り立つ．

Proof. $(1\implies 2)$：$\boldsymbol{B}=d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{A}'$，$\boldsymbol{E}=-d\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-d\phi'-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$
\begin{aligned}
&d(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})=0\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})+d(\phi'-\phi)=0
\end{aligned}
$$

である．上の 1 式目にポアンカレの補題の補題を適用すれば，ある写像 $\Lambda:I\times D\to\mathbb{R}$ で $\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}=d\Lambda$ を満たすものが存在することがわかる．これを上の 2 式目に代入すると，

$$
d\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}+\phi'-\phi\right)=0.
$$

この式に再びポアンカレの補題の補題を適用すれば，ある写像 $C:I\to V$ が存在して

$$
\frac{\partial\Lambda}{\partial t}+\phi'-\phi=C
$$

が成り立つ．以上より，

$$
(\boldsymbol{A}',\phi')=\left(\boldsymbol{A}+d\Lambda,\phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}+C\right)=G_{\Lambda,C}(\boldsymbol{A},\phi).
$$

ゆえに $(\boldsymbol{A},\phi)\sim(\boldsymbol{A}',\phi')$ となる．

$(2\implies 1)$：上の議論を逆向きにたどれば $d(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})=0$，$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})+d(\phi'-\phi)=0$，すなわち $d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{A}'$，$-d\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-d\phi'-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ が成り立つことがわかる． □

上の定理より，商集合 $\mathcal{P}/\sim$ の元と電磁場は 1 対 1 に対応する．

2 ド・ブロイ場とゲージ場

この章では V を**複素** 3 次元内積空間とし，V の向きと正規直交基底 (e_1,e_2,e_3) を 1 つ固定する．この V の向きに対するホッジ $*$ 作用素を $*$ とする．基底 (e_1,e_2,e_3) による座標関数を x^1,x^2,x^3 とし，

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x^2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x^3}^2}$ とおく．また，内積は標準内積，すなわち $z = \sum_i z^i e_i$，$w = \sum_i w^i e_i$ に対して $\langle z, w \rangle = \sum_i \bar{z^i} w^i$（$\bar{z^i}$ は z^i の複素共役）で与えられる内積とする．連続関数 $f : V \to \mathbb{C}$ に対して，$x \in V$ を $x = \sum_i x^i e_i$ と展開することで，f の V 上の**積分**を，

$$\int_V f(x)\ dx = \iiint f(x)\ dx^1 dx^2 dx^3$$

と定義する（右辺は $\mathbb{R}^3$ 上の通常のリーマン積分である）．$M = \mathbb{R} \times V$ とおく．

$U : M \to \mathbb{R}$ と $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ をそれぞれ固定する．

2.1 ド・ブロイ場とド・ブロイ方程式

定義 9. $\Psi : M \to \mathbb{C}$ と正の実数 m に対する次の方程式を**ド・ブロイ方程式**という：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi + U\Psi + \left(\int_V u(\|x - y\|) |\Psi(t, y)|^2\ dy \right) \Psi$$

ここで，$\hbar$ は**ディラック定数**を表す．ド・ブロイ方程式を満たす $\Psi : M \to \mathbb{C}$ を**ド・ブロイ場**という．

注意. 上のド・ブロイ方程式は，物理的には次のようなことを表す．

マクスウェル方程式より，電磁場は波動の性質をもつことがわかる．電磁場を波動とみなしたものを**電磁波**という．実験により，電磁波は観測環境に応じて波動的にも粒子的にも振る舞うことがわかった．すなわち，波動である電磁波が「粒子的」にも現象するということである．

物質を構成する最小単位は総称して**素粒子**とよばれる．この素粒子も，波動的にも粒子的にも振る舞うことが知られている．そこで，上で述べたことと逆に，通常粒子的に振る舞う素粒子を電磁場と同じような波動場として考えたものを**物質場**という．特に，**荷電粒子**を物質場とみなしたものを**荷電物質場**という．この文書では，複素スカラー場によって表される物質場を考えている．

ド・ブロイ方程式は，物理的には質量 m の粒子に対応する物質場 Ψ であって，他の場 U と自らと相互作用するものの運動を表す（第 2 項が他の場との相互作用，第 3 項が自己相互作用を意味している）．

2.2 大局的ゲージ対称性

$\Phi : M \to \mathbb{C}$ に対して，$\theta(t, x) = \arg \Phi(t, x)\ ((t, x) \in M)$ が定義され，これをスカラー場 Φ の**位相**という．$\mathcal{F}(M) = \{\Phi : M \to \mathbb{C}\}$ とおく．

定義 10. 任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，写像 $\Gamma_\alpha : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を，$\Gamma_\alpha(\Phi) = e^{i\alpha}\Phi\ (\Phi \in \mathcal{F}(M))$ によって定義する．この Γ_α を**大局的第 1 種ゲージ変換**という．$\mathcal{G}(M) = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とおく．

明らかに各 Γ_α は全単射であるから，$\mathcal{G}(M)$ は写像の合成により群をなす．$\mathcal{D} = \{\Psi \in \mathcal{F}(M) \mid \Psi$ はド・ブロイ方程式を満たす $\}$ とおく．

定理 11 (**大局的ゲージ対称性**)**.** 写像 $\rho : \mathcal{G}(M) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ が $\rho(\Gamma_\alpha, \Psi) = \Gamma_\alpha(\Psi)$ により定まる．

Proof. $\Gamma_\alpha(\Psi)$ がド・ブロイ方程式を満たすことを示せばよいが，$e^{i\alpha}$ は定数であるから明らかである．□

系 12. 群 $\mathcal{G}(M)$ は写像 ρ により集合 $\mathcal{D}$ に作用する．

Proof. (i) $\Psi \in \mathcal{D}$ のとき，$\mathcal{G}(M)$ の単位元 Γ_0 に対して $\rho(\Gamma_0, \Psi) = \Gamma_0(\Psi) = \Psi$ である．

(ii) $\Psi \in \mathcal{D},\ \Gamma_\alpha, \Gamma_\beta \in \mathcal{G}(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}\rho(\Gamma_\alpha, \rho(\Gamma_\beta, \Psi)) &= \rho(\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta(\Psi)) \\ &= \Gamma_{\alpha+\beta}(\Psi) \\ &= \rho(\Gamma_\alpha \circ \Gamma_\beta, \Psi).\end{aligned}$$

以上より題意が示された． □

2.3 局所的ゲージ対称性

前節では各点において同時に同じ位相だけずらす変換を考えた．この節では，位相のずらし方を各点ごとに変えた変換を考察する．

定義 13. 任意の写像 $\Theta : M \to \mathbb{R}$ に対して, 写像 $\Gamma_\Theta : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を, $\Gamma_\Theta(t,x) = e^{i\Theta(t,x)}\Psi(t,x)$ $((t,x) \in M)$ と定義する．この Γ_Θ を**局所的第 1 種ゲージ変換**という．

Θ が定数関数でなければ，$\Psi \in \mathcal{D}$ であっても $\Gamma_\Theta(\Psi) \in \mathcal{D}$ であるとは限らない．ここで，局所的第 1 種ゲージ変換に対しても不変となる理論を構成することを考える．

定義 14. $\Psi : M \to \mathbb{C}$ と正の実数 m に加え，$\chi : M \to \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{a} : M \to V$ に対する次の方程式を考える：

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi\right)\Psi = -\frac{1}{2m}\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi + U\Psi + \left(\int_V u(\|x-y\|)|\Psi(t,y)|^2\, dy\right)\Psi \tag{(G)}$$

ここで，

$$\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi = \hbar^2\Delta\Psi + (-i\hbar)\,\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\Psi) + (-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}, \mathrm{grad}\,\Psi\rangle - \|\boldsymbol{a}\|^2\Psi$$

である．この方程式を満たす組 $(\chi, \boldsymbol{a})$ を，スカラー場 Ψ に付随する**ゲージ場**という．

定義 15. $\Psi : M \to \mathbb{C},\ \chi : M \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} : M \to V$ とする．このとき，各 $\Theta : M \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\Psi' &= \Gamma_\Theta\Psi \\ \chi' &= \chi - \hbar\frac{\partial\Theta}{\partial t} \\ \boldsymbol{a}' &= \boldsymbol{a} + \hbar\,\mathrm{grad}\,\Theta\end{aligned}$$

とおき，変換 $(\Psi, \chi, \boldsymbol{a}) \mapsto (\Psi', \chi', \boldsymbol{a}')$ を**局所的ゲージ変換**という．

定理 16 (局所的ゲージ対称性). $\Psi : M \to \mathbb{C},\ \chi : M \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} : M \to V$ が方程式 (G) を満たすとき，$(\Psi, \chi, \boldsymbol{a})$ に局所的ゲージ変換を施した $(\Psi', \chi', \boldsymbol{a}')$ も方程式 (G) を満たす．

Proof. Step1：最初に，

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi'\right)\Psi' = e^{i\Theta}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi\right)\Psi$$

を示す．Ψ', χ' の定義を左辺に代入すれば，

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\chi'\right)\Psi' &= i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}-\chi\Psi+\hbar\frac{\partial\Theta}{\partial t}\Psi' \\ &= i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}-\chi\Psi-i\hbar\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial t}-ie^{i\Theta}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \\ &= e^{i\Theta}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\chi\right)\Psi\end{aligned}$$

となる（1 行目から 2 行目の変形は積の微分の逆を用いた）．

Step2：次に，$\Delta_{\boldsymbol{a}'}\Psi' = e^{i\Theta}\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi$ を示す．まず，

$$\Delta_{\boldsymbol{a}'}\Psi' = \hbar^2\Delta\Psi' + (-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}'\Psi') + (-i\hbar)\langle\boldsymbol{a}', \operatorname{grad}\Psi'\rangle - \|\boldsymbol{a}'\|\Psi'$$

である．各項を順番に計算する．以下，簡単のために単に $\sum_i$ と書いたときには $\sum_{i=1}^3$ を意味するとする．

(i) 1 項目を計算する：

$$\begin{aligned}&\hbar^2\Delta\Psi' \\ &= \hbar^2\sum_i\frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2}\left(e^i\Theta\Psi\right) \\ &= \hbar^2\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(i\Psi'\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+e^{i\Theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) \\ &= i\hbar^2\sum_i\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x^i}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\Psi'\frac{\partial^2\Theta}{\partial {x^i}^2}+e^{i\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right)+i\hbar^2e^{i\Theta}\Delta\Psi \\ &= i\hbar^2\sum_i\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\left(i\Psi'\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+e^{i\Theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right)+i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta+i\hbar^2e^{i\Theta}\langle\operatorname{grad}\Theta,\operatorname{grad}\Psi\rangle+\hbar^2e^{i\Theta}\Delta\Psi \\ &= -\hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2+2i\hbar^2e^{i\Theta}\langle\operatorname{grad}\Theta,\operatorname{grad}\Psi\rangle+i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta+\hbar^2e^{i\Theta}\Delta\Psi.\end{aligned}$$

(ii) 2 項目を計算する．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と基底表示すれば，

$$\begin{aligned}&(-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}'\Psi') \\ &= -i\hbar\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a_ie^{i\Theta}\Psi\right)-i\hbar^2\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{i\Theta}\Psi\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\right) \\ &= -i\hbar\sum_i\left(i\Psi'\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}a_i+e^{i\Theta}\frac{\partial}{\partial x^i}(a_i\Psi)\right)-i\hbar^2\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{i\Theta}\Psi\right)+e^{i\Theta}\Psi\frac{\partial^2\Theta}{\partial {x^i}^2}\right) \\ &= \hbar\Psi'\langle\boldsymbol{a},\operatorname{grad}\Theta\rangle+(-i\hbar)e^{i\Theta}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi)-i\hbar^2\sum_i\left(i\Psi'\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+e^{i\Theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}-i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta \\ &= \hbar\Psi'\langle\boldsymbol{a},\operatorname{grad}\Theta\rangle+(-i\hbar)e^{i\Theta}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi)-i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta+\hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2-i\hbar^2e^{i\Theta}\langle\operatorname{grad}\Theta,\operatorname{grad}\Psi\rangle.\end{aligned}$$

(iii) 3 項目を計算する．式

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Psi' &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{i\Theta}\Psi\right)\right)_i \\ &= \left(i\Psi'\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+e^{i\Theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right)_i \\ &= i\Psi'\operatorname{grad}\Theta+e^{i\Theta}\operatorname{grad}\Psi\end{aligned}$$

を用いれば,

$$
\begin{aligned}
&(-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}', \operatorname{grad}\Psi\rangle \\
&= -i\hbar\langle \boldsymbol{a} + \hbar \operatorname{grad}\Theta, i\Psi' \operatorname{grad}\Theta + e^{i\Theta}\operatorname{grad}\Psi\rangle \\
&= \hbar\Psi'\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle + (-i\hbar)e^{i\Theta}\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Psi\rangle + \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2 - i\hbar^2 e^{i\Theta}\langle \operatorname{grad}\Theta, \operatorname{grad}\Psi\rangle.
\end{aligned}
$$

(iv) 4 項目を計算する：

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{a}'\|^2\Psi' \\
&= \langle \boldsymbol{a} + \hbar \operatorname{grad}\Theta, \boldsymbol{a} + \hbar \operatorname{grad}\Theta\rangle\Psi' \\
&= e^{i\Theta}\|\boldsymbol{a}\|^2\Psi + 2\hbar\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle\Psi' + \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2.
\end{aligned}
$$

(v) 1,2,3 項目を足し合わせる：

$$
\begin{aligned}
&\hbar^2\Delta\Psi' + (-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}'\Psi') + (-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}', \operatorname{grad}\Psi\rangle \\
&= (\hbar^2 e^{i\Theta}\Delta\Psi + (-i\hbar)e^{i\Theta}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi) + (-i\hbar)e^{i\Theta}\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Psi\rangle) + (i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta - i\hbar^2\Psi'\Delta\Theta) \\
&\quad + (-\hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2 + \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2) + (2i\hbar^2 e^{i\Theta}\langle \operatorname{grad}\Theta, \operatorname{grad}\Psi\rangle - 2i\hbar^2\langle \operatorname{grad}\Theta, \operatorname{grad}\Psi\rangle) \\
&\quad + 2\hbar\Psi'\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle + \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2 \\
&= e^{i\Theta}(\hbar^2\Delta\Psi + (-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi) + (-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Psi\rangle) + 2\hbar\Psi'\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle + \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2.
\end{aligned}
$$

(iv) の式から (v) の式を引けば,

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{\boldsymbol{a}'}\Psi' \\
&= e^{i\Theta}(\hbar^2\Delta\Psi + (-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi) + (-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Psi\rangle - \|\boldsymbol{a}\|^2\Psi) \\
&\quad + (2\hbar\Psi'\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle - 2\hbar\Psi'\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Theta\rangle) + (\hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2 - \hbar^2\Psi'\|\operatorname{grad}\Theta\|^2) \\
&= e^{i\Theta}(\hbar^2\Delta\Psi + (-i\hbar)\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\Psi) + (-i\hbar)\langle \boldsymbol{a}, \operatorname{grad}\Psi\rangle - \|\boldsymbol{a}\|^2\Psi) \\
&= e^{i\Theta}\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi
\end{aligned}
$$

Step3：Step1 と Step2 の結果を用いれば,

$$
\begin{aligned}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi'\right)\Psi' &= -\frac{1}{2m}\Delta_{\boldsymbol{a}'}\Psi' + U\Psi' + \left(\int_V u(\|x-y\|)|\Psi'(t,y)|^2\ dy\right)\Psi' \\
e^{i\Theta}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi\right)\Psi &= -\frac{e^{i\Theta}}{2m}\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi + e^{i\Theta}U\Psi + e^{i\Theta}\left(\int_V u(\|x-y\|)|\Psi(t,y)|^2\ dy\right)\Psi \\
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \chi\right)\Psi &= -\frac{1}{2m}\Delta_{\boldsymbol{a}}\Psi + U\Psi + \left(\int_V u(\|x-y\|)|\Psi(t,y)|^2\ dy\right)\Psi
\end{aligned}
$$

よって $(\Psi, \chi, \boldsymbol{a})$ が方程式 (G) を満たすことより，$(\Psi', \chi', \boldsymbol{a}')$ も方程式 (G) を満たすことがわかった. □

2.4 電磁ポテンシャルとゲージ場

この節では，Ψ は荷電粒子に対する物質場，すなわち荷電物質場であるとする（2.1 節の注意参照).

ゲージ場に対する局所的ゲージ変換と電磁ポテンシャルに対する第 2 種ゲージ変換を見比べると，$\Lambda \mapsto \hbar\Theta$, $\phi \mapsto \chi$, $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{a}$ と対応させることで，電磁ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ は荷電物質場 Ψ に付随するゲージ

場であるとみなせる．よって，電磁ポテンシャルに対するマクスウェル方程式 (M5),(M6) は，ゲージ場が満たす方程式，すなわち**ゲージ場の方程式**である．以下，ゲージ場は現在考えている荷電物質場とだけ相互作用をするとする．

ド・ブロイ場 Ψ は，物理的には物質を波動と見たときの物質の分布状態を表すものである．そこで，$q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を定数として

$$
\begin{aligned}
&q\rho_\Psi(t,x) = q|\Psi(t,x)|^2 \\
&\boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}} = \frac{q}{2m}\{\overline{\Psi}((-i\hbar)\operatorname{grad} - \boldsymbol{A})\Psi - \Psi((-i\hbar)\operatorname{grad} + \boldsymbol{A})\overline{\Psi}\}
\end{aligned}
$$

とおくと，次の定理が成り立つ：

定理 17. 上の $q\rho_\Psi, \boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}}$ は次の**連続の方程式**を満たす：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}} = -\frac{\partial}{\partial t}(q\rho_\Psi)$$

Proof. 右辺を計算すれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(q\rho_\Psi) \\
&= q\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}\Psi - \overline{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \\
&= \frac{iq}{\hbar}\left((-i\hbar)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t} - \overline{\Psi}(i\hbar)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，方程式 (G) とその複素共役を代入すれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{iq}{\hbar}\left((-i\hbar)\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t} - \overline{\Psi}(i\hbar)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{iq}{2m\hbar}\big(\Psi\overline{\Delta_{\boldsymbol{A}}\Psi} - \overline{\Psi}\Delta_{\boldsymbol{A}}\Psi\big) \\
&= -\frac{q}{2m}\big((-i\hbar)(\overline{\Psi}\Delta\Psi - \Psi\Delta\overline{\Psi}) - (\Psi\langle\boldsymbol{A}, \operatorname{grad}\overline{\Psi}\rangle + \overline{\Psi}\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\Psi)) - (\overline{\Psi}\langle\boldsymbol{A}, \operatorname{grad}\Psi\rangle + \Psi\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\overline{\Psi}))\big) \\
&= -\frac{q}{2m}\big((-i\hbar)\operatorname{div}(\overline{\Psi}\operatorname{grad}\Psi - \Psi\operatorname{grad}\overline{\Psi}) - \operatorname{div}(\overline{\Psi}(\boldsymbol{A}\Psi)) - \operatorname{div}(\Psi(\boldsymbol{A}\overline{\Psi}))\big) \\
&= -\operatorname{div}\left(\frac{q}{2m}\big(\overline{\Psi}((-i\hbar)\operatorname{grad} - \boldsymbol{A})\Psi - \Psi((-i\hbar)\operatorname{grad} + \boldsymbol{A})\overline{\Psi}\big)\right) \\
&= -\operatorname{div}\boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}}.
\end{aligned}
$$

ただし，3 行目から 4 行目の変形には次の 3 つの式を用いた：

(i)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\overline{\Psi}(\boldsymbol{A}\Psi)) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\overline{\Psi}(A_i\Psi)\big) \\
&= \Psi\sum_i A_i\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^i} + \overline{\Psi}\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(A_i\Psi) \\
&= \Psi\langle\boldsymbol{A}, \operatorname{grad}\overline{\Psi}\rangle + \overline{\Psi}\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\Psi)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\Psi(\boldsymbol{A}\overline{\Psi})) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\Psi(A_i\overline{\Psi})\big) \\
&= \overline{\Psi}\sum_i A_i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \Psi \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\big(A_i\overline{\Psi}\big) \\
&= \overline{\Psi}\langle \boldsymbol{A}, \operatorname{grad}\Psi\rangle + \Psi \operatorname{div}(\boldsymbol{A}, \overline{\Psi})
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\overline{\Psi}\operatorname{grad}\Psi) - \operatorname{div}(\Psi\operatorname{grad}\overline{\Psi}) \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\overline{\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Psi\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x^i}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \overline{\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial {x^i}^2}\right) - \sum_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x^i} + \Psi\frac{\partial^2}{\partial \overline{\Psi}^2}\right) \\
&= \overline{\Psi}\Delta\Psi - \Psi\Delta\overline{\Psi}
\end{aligned}
$$

□

上の定理より，$\rho_\Psi, \boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}}$ はそれぞれ電荷密度，電流密度を表すと解釈できる．

補題 18. $\boldsymbol{A}: I\times D \to V,\ \phi: I\times D\to\mathbb{R}$ とする．誘電率テンソル $\hat{\varepsilon_0}$ の正規直交基底に関する成分が ε_0 となるように V の向きを固定すると，$(\boldsymbol{A},\phi)$ に対するマクスウェル方程式 (M5),(M6) は次の連立偏微分方程式 (M5)',(M6)' と同値である：

$$
\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{M5'}
$$

$$
\Box\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A}\right) = \frac{*\boldsymbol{J}}{c^2\varepsilon_0} \tag{M6'}
$$

ここで，ρ は $\hat{\rho}$ の正規直交基底に関する成分であり，$\Box\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A}$ とする．

Proof. $(\boldsymbol{A},\phi)$ が (M5),(M6) を満たすとする．(M5) にホッジの $*$ 作用素を施せば，定理 49 と定理 63 より

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{A} + \delta d\phi\right) &= \rho \\
-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \Delta\phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

同様に，(M6) にホッジの $*$ 作用素を施すと，定理 67 より

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} + c^2\delta d\boldsymbol{A}\right) &= *\boldsymbol{J} - \varepsilon_0 d\frac{\partial\phi}{\partial t} \\
c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right) &= *\boldsymbol{J} \\
\Box\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= \frac{*\boldsymbol{J}}{c^2\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

逆に $(\boldsymbol{A}, \phi)$ が (M5)',(M6)' を満たすとする．主張で述べた正規直交基底を (e_1, e_2, e_3) としたとき，$\hat{\varepsilon_0}, \hat{\rho}$ をそれぞれ

$$\hat{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$
$$\hat{\rho} = \rho e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

と定義する．このとき，上の式変形を逆向きにたどり，最後にホッジの $*$ 作用素を施せば (M5),(M6) が得られる． $\square$

以上の議論より，$(\Psi, \phi, \boldsymbol{A})$ に対する次の連立偏微分方程式

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \phi\right)\Psi = -\frac{1}{2m}\Delta_{\boldsymbol{A}}\Psi + U\Psi + \left(\int_V u(\|x-y\|)|\Psi(t,y)|^2\ dy\right)\Psi \tag{MD1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \Delta\phi = -\frac{\rho_\Psi}{\varepsilon_0} \tag{MD2}$$

$$\Box\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A}\right) = \frac{\boldsymbol{j}_{\Psi,\boldsymbol{A}}}{c^2\varepsilon_0} \tag{MD3}$$

が荷電物質場とゲージ場の相互作用を表す方程式であると考えられる．この方程式を**マクスウェル-ド・ブロイ方程式**という．

注意. これまでの結果は，大域的ゲージ対称性をもつド・ブロイ場の理論に対して局所的ゲージ対称性を要求することで，ゲージ場とド・ブロイ場の相互作用の形が決まってしまうことを意味する．

ここではド・ブロイ場である荷電物質場のみを考えたが，それ以外にもこのような局所的ゲージ対称性から場同士の相互作用が決定されるという構造をもつものがいくつも存在する．よって，ゲージ対称性は相互作用を決める 1 つの原理と考えられ，これを**ゲージ対称性の原理**という．このゲージ対称性の原理に基づく理論は**ゲージ場の理論**と呼ばれている．よって，マクスウェル方程式による電磁場の理論はゲージ場の理論の 1 つの例となっている．

3　4 次元時空とマクスウェル方程式

V を 3 次元内積空間とし，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を V の 1 つの正規直交基底とする．

3.1　ミンコフスキー空間

M を $(n+1)$ 次元ベクトル空間とし，$(e_i)_{i=0}^n$ を M の 1 つの基底とする．n 次の行列 $\eta = (\eta_{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu\le n}$ を，

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 0) \\ -1 & (\mu = \nu = 1, \dots, n) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

と定める．定義から η は対称行列であり，対角成分はすべて 0 でないから正則である．ゆえに定理 39 より $g_\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ なる M 上の計量 g_η が存在する．よって，次の定義をする：

定義 19. (M, g) を $(n+1)$ 次元計量ベクトル空間とする．このとき，M の基底 $(e_i)_{i=0}^n$ で $g(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ $(0 \le \mu, \nu \le n)$ なるものが存在するならば，(M, g) を $(n+1)$ **次元ミンコフスキーベクトル空間**という．

3.2　4 次元時空

$\mathbb{R}\times V$ を直積ベクトル空間とし，変数 $t\in\mathbb{R}$ に対し新たな変数 $x^0\in\mathbb{R}$ を $x^0=ct$ と定義する．このとき，

$$\hat{e}_0=(1,\mathbf{0})\in\mathbb{R}\times V$$
$$\hat{e}_i=(0,\boldsymbol{e}_i)\in\mathbb{R}\times V\ (1\leq i\leq 3)$$

とおき，写像 $G:(\mathbb{R}\times V)\times(\mathbb{R}\times V)\to\mathbb{R}$ を，$x=(x^0,\boldsymbol{x})$, $y=(y^0,\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}\times V$ に対して

$$G(x,y)=x^0y^0-\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_V$$

と定義する．

定理 20. $W\coloneqq(\mathbb{R}\times V,G)$ は 4 次元ミンコフスキーベクトル空間であり，$(\hat{e}_\mu)_{\mu=0}^3$ は W の正規直交基底である．

Proof. Step1：まず，明らかに $(\hat{e}_\mu)_{\mu=0}^3$ は $\mathbb{R}\times V$ の基底であるから $\mathbb{R}\times V$ は 4 次元ベクトル空間である．$\hat{e}_0$ と G の定義より $G(\hat{e}_0,\hat{e}_0)=1$ で，$\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ の定義と $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ が V の正規直交基底であることから $G(\hat{e}_i,\hat{e}_i)=-1\ (1\leq i\leq 3)$ が成り立つ．

Step2：$\mu\neq\nu$ のとき $G(\hat{e}_\mu,\hat{e}_\nu)$ であることを示す．

(i) $\mu\neq\nu=0$ のとき：$\hat{e}_0$ の定義より $G(\hat{e}_\mu,\hat{e}_0)=0\cdot1-\langle\boldsymbol{e}_\mu,\mathbf{0}\rangle_V=0$.

(ii) $1\leq\mu\neq\leq 3$ のとき：$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ は V の正規直交基底であるから $G(\hat{e}_\mu,\hat{e}_\nu)=\langle\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu\rangle_V=0$.

以上より W が 4 次元ミンコフスキーベクトル空間であること，$(\hat{e}_\mu)_{\mu=0}^3$ が W の正規直交基底であることがわかった． □

定理 21. 任意の 4 次元ミンコフスキー空間 (M,g) に対して，ある内積空間 $(V,\langle\cdot\rangle_V)$ が存在して，G を上で述べた方法で定まる $\mathbb{R}\times V$ の計量とすると $(M,g)\cong(\mathbb{R}\times V,G)$ が成り立つ．

Proof. (M,g) の正規直交基底の 1 つを $(e_i)_{i=0}^3$ とし，V を e_1,e_2,e_3 で生成されるベクトル空間とする．このとき，V は有限次元であるから標準内積 ($x=\sum_{i=1}^3x^ie_i$, $y=\sum_{i=1}^3y^ie_i\in V$ に対して $\langle x,y\rangle_V=\sum_{i=1}^3x^iy^i$ で定まる内積 $\langle\cdot\rangle$) により内積空間になる．直積ベクトル空間 $\mathbb{R}\times V$ は 4 次元であるから M と $\mathbb{R}\times V$ はベクトル空間として同型である (次元が等しいベクトル空間はすべて互いに同型であるため)．すなわち, 各 $0\leq i\leq 3$ に対して $Te_i=\hat{e}_i$ を満たすベクトル空間の同型写像 $T:M\to\mathbb{R}\times V$ が存在する．ここで，各 $0\leq i,j\leq 3$ に対し $g(e_i,e_j)=G(\hat{e}_i,\hat{e}_j)=\eta_{ij}$ が成り立つ．したがって，任意の $u=\sum_{i=0}^3u^ie_i$, $v=\sum_{i=0}^3v^ie_i\in M$ に対して，

$$\begin{aligned}G(Tu,Tv)&=\sum_{i,j=0}^3G(Te_i,Te_j)u^iv^i\\&=\sum_{i,j=0}^3\eta_{ij}u^iv^i\\&=g(u,v).\end{aligned}$$

ゆえに，T により (M,g) と $(\mathbb{R}\times V,G)$ は計量同型になる． □

注意. 一般に，任意の次元の等しいミンコフスキーベクトル空間が互いに計量同型となることが上と同様の方法で示せる．

以降，$d, \delta, \Box$ をそれぞれ W に対する外微分作用素，余微分作用素，ラプラス-ベルトラミ作用素（定理 68 参照）とし，d_V, δ_V, Δ_V をそれぞれ V に対する外微分作用素，余微分作用素，ラプラス-ベルトラミ作用素とする．

3.3 マクスウェル方程式の書き換え

補題 22. 補題 18 の状況を考える．このとき，$(\boldsymbol{A}, \phi)$ に対するマクスウェル方程式 (M5),(M6) は次の連立偏微分方程式と同値である．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} + \Delta_V\right)\frac{\phi}{c} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(-\delta_V \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right) = \frac{\rho}{c\varepsilon_0} \tag{M7}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} + \Delta_V\right)\boldsymbol{A} + d_V\left(-\delta_V \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right) = \frac{\boldsymbol{j}}{c^2\varepsilon_0} \tag{M8}$$

ただし $\boldsymbol{j} \coloneqq *\boldsymbol{J}$.

Proof. $(\boldsymbol{A}, \phi)$ が (M5),(M6) を満たすとする．補題 18 と同様に，(M5) にホッジの $*$ 作用素を施せば，定理 67 より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta_V \boldsymbol{A} + \delta_V d_V \phi\right) &= \rho \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2}\right) + c\frac{\partial}{\partial x^0}\delta_V \boldsymbol{A} + \Delta_V \phi - d_V \delta_V \phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} + \Delta_V\right)\frac{\phi}{c} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(-\delta_V \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right) &= \frac{\rho}{c\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

同様に，(M6) にホッジの $*$ 作用素を施せば，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + c^2 \delta d \boldsymbol{A}\right) &= *\boldsymbol{J} - \varepsilon_0 d\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
c^2\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial {x^0}^2} + \Delta_V \boldsymbol{A} - d_V \delta_V \boldsymbol{A} + d\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right)\right) &= \boldsymbol{j} \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} + \Delta_V\right)\boldsymbol{A} + d\left(-\delta_V \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right) &= \frac{\boldsymbol{j}}{c^2\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

逆に $(\boldsymbol{A}, \phi)$ が (M7),(M8) を満たすとすれば，上の式変形を逆にたどり，最後にホッジの $*$ 作用素を施せばよい． $\Box$

定理 23. 3 次元内積空間 V に対する $\boldsymbol{A} : I \times V \to V$, $\phi : I \times V \to \mathbb{R}$ についてのマクスウェル方程式 (M5),(M6) は，4 次元ミンコフスキーベクトル空間 W に対する $A, j : W \to W^*$ についての方程式

$$\Box A - d\delta A = j \tag{FM1}$$

と同値である．

注意. ラプラス-ベルトラミ作用素の定義より $d\delta + \delta d = \Box$，すなわち $\Box - d\delta = \delta d$ が成り立つから，方程式 (FM1) は次のように書くこともできる：

$$\delta d A = j \qquad \text{(FM1)'}$$

Proof. まず，$(\boldsymbol{A},\phi)$ に対する方程式 (M5),(M6) から (FM1) を導く．V から 4.2 節のように 4 次元ミンコフスキーベクトル空間 (W,G) をつくり，正規直交基底 $(\hat{e}_\mu)_{\mu=0}^3$ に関する座標関数を x^μ とする．

Step1：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{j}$ を V においてそれぞれ $\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^3 A^i e_i$, $\boldsymbol{j}=\sum_{i=1}^3 j^i e_i$ と展開し，$\hat{A},\hat{j}:W\to W^*$ を，$x\in W$ に対して

$$\hat{A}(x)=\frac{\phi(x)}{c}dx^0-\sum_{i=1}^3 A^i(x)dx^i$$
$$\hat{j}(x)=\frac{\rho(x)}{c\varepsilon_0}dx^0-\sum_{i=1}^3\frac{j^i(x)}{c^2\varepsilon_0}dx^i$$

と定義する．

Step2：定理 61，定理 67，定理 68 を用いれば，

$$\begin{aligned}
&\Box\hat{A}-d\delta\hat{A}\\
&=\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}\left(\frac{\phi}{c}\right)-\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2}{\partial{x^j}^2}\left(\frac{\phi}{c}\right)\right)dx^0+\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}(-A^i)-\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2}{\partial{x^j}^2}(-A^i)\right)dx^i\right\}-d\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\phi}{c}\right)-\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x^j}(-A^i)\right)\\
&=\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}+\Delta_V\right)\left(\frac{\phi}{c}\right)dx^0-\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2 A^i}{\partial{x^0}^2}-\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2 A^i}{\partial{x^j}^2}\right)dx^i-\sum_{i=0}^3\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\phi}{c}\right)-\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x^j}(-A^i)\right)dx^i\\
&=\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}+\Delta_V\right)\frac{\phi}{c}-\frac{\partial}{\partial x^0}\left(-\delta_V\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right)\right\}dx^0-\sum_{i=1}^3\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}-\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2}{\partial{x^j}^2}\right)A^i+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^3\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\right\}dx^i.
\end{aligned}\tag{A}$$

2 項目を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}-\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2}{\partial{x^j}^2}\right)A^i+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^3\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\right\}dx^i\\
&=\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial{x^0}^2}-\sum_{i=1}^3\left(\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2 A^i}{\partial{x^j}^2}\right)dx^i\right)+d_V\left(\sum_{j=1}^3\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\\
&=\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}+\Delta_V\right)\boldsymbol{A}+d_V\left(-\delta_V\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right).
\end{aligned}\tag{B}$$

Step3：式 (B) から式 (A) の 2 項目は式 (M8) の左辺を基底により展開したものであることがわかる．よって，補題 22 より (M5),(M6) は (M7),(M8) と同値であるから，次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}+\Delta_V\right)\frac{\phi}{c}-\frac{\partial}{\partial x^0}\left(-\delta_V\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right)\right\}dx^0\\
&\quad-\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial{x^0}^2}+\Delta_V\right)\boldsymbol{A}+d\left(-\delta_V\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right)\right\}\\
&=\frac{\rho}{c\varepsilon_0}dx^0-\frac{\boldsymbol{j}}{c^2\varepsilon_0}.
\end{aligned}\tag{$*$}$$

この式の右辺は $\hat{j}$ に等しく，Step2 より左辺は $\Box\hat{A}-d\delta\hat{A}$ に等しいから，結局

$$\Box\hat{A}-d\delta\hat{A}=\hat{j}$$

が成り立つ．

逆に，$A, j : W \to W^*$ が (FM1) を満たすとする．W の正規直交基底の 1 つを $(e_i)_{i=0}^3$ とし，定理 21 により W から得られる 3 次元内積空間を V とする．A, j をそれぞれ $A = \sum_{i=0}^3 A_i dx^i$，$j = \sum_{i=0}^3 j_i dx^i$ と展開し，これを用いて

$$\begin{aligned}
\phi &= cA_0 \\
\boldsymbol{A} &= -\sum_{i=1}^{3} A_i e_i \\
\rho &= c\varepsilon_0 j_0 \\
\boldsymbol{j} &= -c^2\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{3} j_i e_i
\end{aligned}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\phi}{c} e_0 - \boldsymbol{A} \\
j &= \frac{\rho}{c\varepsilon_0} e_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{c^2\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これを (FM1) に代入し，式 (A),(B) を用いることで式 $(*)$ が得られ，基底の係数を比較することで (M7),(M8) が得られる．ゆえに補題 22 より (M5),(M6) が成り立つことがわかる． □

定義 24. 方程式 (FD1) を満たす $A, j : W \to W^*$ をそれぞれ**電磁的ゲージ場**，**4 次元電流密度**という．$\mathcal{E} = \{(A, j) \mid A, j : W \to W^* \text{はそれぞれ電磁的ゲージ場，4 次元電流密度}\}$ とおく．

定理 25. $(A, j) \in \mathcal{E}$ とする．このとき，任意の $\Lambda : W \to \mathbb{R}$ に対して $\widetilde{G}_\Lambda(A, j) = (A - d\Lambda, j)$ とおくと $\widetilde{G}_\Lambda(A, j) \in \mathcal{E}$ が成り立つ．ゆえに写像 $\widetilde{G}_\Lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{E}; (A, j) \mapsto \widetilde{G}_\Lambda(A, j)$ が定まる．この $\widetilde{G}_\Lambda$ を **4 次元的ゲージ変換**という．

Proof. ラプラス-ベルトラミ作用素の定義より $d\delta + \delta d = \Box$，すなわち $\Box - d\delta = \delta d$ が成り立つから，外微分作用素の定義より

$$\begin{aligned}
&\Box(A - d\Lambda) - d\delta(A - d\Lambda) = j \\
&\delta d(A - d\Lambda) = j \\
&\delta dA - \delta d^2\Lambda = j \\
&\delta dA = j \\
&\Box A - d\delta A = j.
\end{aligned}$$

ゆえに $\widetilde{G}_\Lambda(A, j) \in \mathcal{E}$ が成り立つ． □

$\mathcal{E}$ における関係 $\sim$ を，$(A, j), (A', j) \in \mathcal{E}$ に対して，ある $\Lambda : W \to \mathbb{R}$ が存在して $(A', j) = \widetilde{G}_\Lambda(A, j)$ が成り立つとき $(A, j) \sim (A', j)$ として定義すると，これは $\mathcal{E}$ における同値関係になる．ゆえに，電磁的ゲージ場と 4 次元電流密度の組の同値類が，電磁現象を生成する根源的な存在であることがわかる．

定義 26. 電磁的ゲージ場 $A : W \to W^*$ に対して $F = dA$ とおき，これを**電磁場テンソル**という．

上で定義した電磁場テンソルが，いわば電場と磁場の「統一体」になっていることが次のようにしてわかる：

電磁場テンソル F は $A^2(W)$ の元であるから，正規直交基底 $(dx^\mu)_{\mu=0}^3$ により

$$F = \sum_{0\le\mu<\nu\le3} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と展開される．ここで，電磁的ゲージ場 A を $A = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu dx^\mu$ と展開すれば，定理 58 より各 $0 \le \mu < \nu \le 3$ に対し

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

である．このとき，電磁ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を定理 23 のように $\boldsymbol{A} = -\sum_{i=1}^3 A_i e_i$, $\phi = cA_0$ と定義すると，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -d\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x^i} e_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial t} e_i \\
&= \sum_{i=1}^3 c\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i}\right) e_i \\
\boldsymbol{B} &= d\boldsymbol{A} \\
&= \sum_{1\le i<j\le3} F_{ij} e_i \wedge e_j
\end{aligned}$$

と表せる．よって，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ $\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^3 E^i e_i$, $\boldsymbol{B} = \sum_{1\le i<j\le3} B^{ij} e_i \wedge e_j$ と展開すれば，各 $1 \le i < j \le 3$ に対して

$$\begin{aligned}
F_{0i} &= \frac{E^i}{c} \\
F_{ij} &= B^{ij}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは電磁場テンソル F が電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の統一体となっていることを意味する．また，F の成分表示 $F_{\mu\nu}$ は基底のとり方に依存するから，以上の結果により，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は個別では「相対的」なものであり，その統一体である電磁場テンソル F こそが「絶対的」意味をもつものであると考えられる．

定理 27. $A, j : W \to W^*$ についての方程式 (FM1) は，$F : W \to \bigwedge^2 W^*$, $j : W \to W^*$ についての連立方程式

$$\begin{aligned}
dF &= 0 \\
\delta F &= j
\end{aligned} \tag{FM2}$$

と同値である．

Proof. 方程式 (FM1) を満たす $A, j : W \to W^*$ が与えられたとき，F を電磁場テンソル（すなわち $F = dA$）とすれば，外微分作用素の定義より $dF = d^2A = 0$ となり，定理 23 の注意より $\delta F = \delta dF = j$ となる．

逆に，$F : W \to \bigwedge^2 W^*$, $j : W \to W^*$ が連立方程式 (FM2) を満たすとする．このとき，$dF = 0$ とポアンカレの補題から $F = dA$ なる $A : W \to W^*$ が存在する．したがって，$\delta F = \delta dA = \Box A - d\delta A = j$ である． □

付録 A　数学に関する補足

A.1　外積

V をベクトル空間とする．

定義 28. $V_1, \ldots, V_p$ $(p \geq 1)$ をベクトル空間とする．

(i) 各 $u_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq p)$ に対し，写像 $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p : V_1^* \times \cdots \times V_p^* \to \mathbb{R}$ を，

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p)(\phi_1, \ldots, \phi_p) = \phi_1(u_1) \cdots \phi_p(u_p)\ ((\phi_1, \ldots, \phi_p) \in V_1^* \times \cdots \times V_p^*)$$

と定義する．

(ii) 集合 $\{u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \mid u_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq p\}$ で生成されるベクトル空間を $\bigotimes_{i=1}^p V_i$ とかき，このベクトル空間を $V_1, \ldots, V_p$ の**テンソル積**といい．その元を p **階テンソル**という．また，$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ $(u_i \in V)$ という形のテンソルを p **階の単テンソル**という．

(iii) 各 $1 \leq i \leq p$ に対して $V_i = V$ のとき，$\bigotimes_{i=1}^p V_i$ の代わりに $\bigotimes^p V$ とかき，これを V の p **重テンソル積**という．

(iv) p, q を正の整数，$T = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \in \bigotimes^p V,\ S = v_1 \otimes \cdots \otimes v_q \in \bigotimes^q V$ $(u_i, v_i \in V)$ としたとき，$(p+q)$ 階テンソル $T \otimes S$ を

$$T \otimes S = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q$$

と定義する．

(v) $T \in \bigotimes^p V,\ S \in \bigotimes^q V$ を $T = \sum_i a_i T_i,\ S = \sum_i b_i S_i$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R},\ T_i, S_i$は単テンソル$)$ と表したとき，

$$T \otimes S = \sum_{i,j} a_i b_j T_i \otimes S_j$$

と定義する（右辺は T, S の展開の仕方によらない）．

定義 29. (i) 正の整数 p に対し，1 から p までの整数の集合を $X_p = \{1, \ldots, p\}$ とする．このとき全単射 $\sigma : X_p \to X_p$ を p **次の置換**という．p 次の置換全体の集合を S_p とかく．2 つの置換 $\sigma, \tau \in S_p$ の**積** $\sigma\tau$ を $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ と定義する．

(ii) $i \neq j \in X_p$ に対し，$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i$ かつ $\sigma(k) = k$ $(k \neq i, j)$ を満たす置換 σ を i と j の**互換**という．任意の置換 σ はいくつかの互換の積として表される．

(iii) 置換 σ が偶数個の互換の積で表されるとき σ を**偶置換**，奇数個の互換の積で表されるとき σ を**奇置換**という．

(iv) 写像 $\mathrm{sgn} : S_p \to \{-1, 1\}$ を，$\sigma \in S_p$ に対して

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換}) \end{cases}$$

と定義し，これを置換 σ の**符号**という．

定義 30. (i) $T \in \bigotimes^p$ $(p \leq 2)$ が，任意の $\phi_1, \ldots, \phi_p \in V^*$ と任意の $\sigma \in S_p$ に対して

$$T(\phi_{\sigma 1}, \ldots, \phi_{\sigma p}) = \mathrm{sgn}(\sigma) T(\phi_1, \ldots, \phi_p)$$

を満たすとき，T を p **階反対称テンソル**という．p 階反対称テンソル全体の集合を $\bigwedge^p V$ とかく．

(ii) $\bigwedge^0 V=\mathbb{R},\ \bigwedge^1 V=V$ とおく．

定義 31. (i) $\sigma\in S_p$ とする．このとき，写像 $P_\sigma:\bigotimes^p V\to\bigotimes^p V$ を，$T\in\bigotimes^p V$ を

$$T=\sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}u^{(1)}_{i_1}\otimes\cdots\otimes u^{(p)}_{i_p}\quad(1\le i_j\le n_j,\ 1\le j\le p,\ a_{i_1\cdots i_p}\in\mathbb{R},\ u^{(j)}_{i_j}\in V)$$

と展開することにより

$$P_\sigma(T)=\sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}u^{(\sigma(1))}_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes u^{(\sigma(p))}_{i_{\sigma(p)}}$$

と定義する．この P_σ を置換 σ に対応する**置換作用素**という．

(ii) 写像 $\mathcal{A}_p:\bigotimes^p V\to\bigotimes^p V$ を

$$\mathcal{A}_p=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)P_\sigma$$

と定義し，p 次の**反対称化作用素**という．任意の $T\in\bigotimes^p V$ に対して $\mathcal{A}_p(T)\in\bigwedge^p V$ が成り立つ．

(iii) 任意の整数 $p,q\ge 0,\ p+q\ge 1$ と $T\in\bigwedge^p V,\ S\in\bigwedge^q V$ に対し，$T\wedge S\in\bigwedge^{p+q}V$ を

$$T\wedge S=\sqrt{\frac{(p+q)!}{p!q!}}\mathcal{A}_{p+q}(T\otimes S)$$

と定義し，これを T と S の**外積**という．

定理 32. V を n 次元，$1\le p\le n$ とし，$(e_i)_{i=1}^n$ を V の基底とする．このとき，$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\mid 1\le i_1<\cdots<i_p\le n\}$ は $\bigwedge^p V$ の基底をなし，$\dim\bigwedge^p V=\binom{n}{p}$ が成り立つ．特に，$\bigwedge^n V$ は 1 次元である．

系 33. 任意の $T\in\bigwedge^p V$ は

$$T=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}T^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\quad(T^{i_1\cdots i_p}\in\mathbb{R})$$

と一意的に表される．

定義 34. $T\in\bigwedge^p V$ を $\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}T^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ と展開したとき，任意の $i_1,\dots,i_p$ $(1\le i_j\le n,\ 1\le j\le p)$ に対して，

$$T^{i_1\cdots i_p}=\begin{cases}0 & (i_1,\dots,i_p\ \text{のうち少なくとも 2 つが等しい})\\ \mathrm{sgn}(\sigma)T^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}} & ((i_1,\dots,i_p)\ \text{がすべて互いに異なる})\end{cases}$$

とおく（ただし σ は $i_{\sigma(1)}<\cdots<i_{\sigma(p)}$ なる置換）．このとき $\{T^{i_1\cdots i_p}\mid 1\le i_j\le n,\ 1\le j\le p\}$ を**テンソル T の成分の反対称化**という．

この pdf では反対称テンソルの成分はつねに反対称化されているとする．

注意. $T\in\bigwedge^p V$ が反対称化されているとき，任意の置換 σ に対して $T^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}=\mathrm{sgn}(\sigma)T^{i_1\cdots i_p}$ が成り立ち，T の展開は

$$T=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\dots,i_p=1}^n T^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

と書き直せる．

A.2　計量

A.2.1　計量ベクトル空間

定義 35. V をベクトル空間とする．写像 $g : V \times V \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき，g を V 上の**計量**という．

1. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ と $u, v, w \in V$ に対して，

$$g(w, au + bv) = ag(w, u) + bg(w, v)$$

   が成り立つ．
2. 任意の $u, v \in V$ に対して $g(u, v) = g(v, u)$ が成り立つ．
3. $\{v \in V \mid g(u, v) = 0,\ u \in V\} = \{0\}$ が成り立つ．

V と計量 g の組 (V, g) を**計量ベクトル空間**という．計量 g を固定して考える場合，$u, v \in V$ に対して $g(u, v) = \langle u, v \rangle_V$ ともかき，V も明らかである場合単に $\langle u, v \rangle$ とかく．

各 $u \in V$ に対して $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ とおき，ベクトル u の**ノルム**という．

定義 36. (V, g) を計量ベクトル空間とする．

- $u \in V$ が $|\langle u, u \rangle| = 1$ を満たすとき，u を**単位ベクトル**という．
- $u, v \in V$ が $\langle u, v \rangle = 0$ を満たすとき，u と v は**直交する**という．
- $\dim V = n < \infty$ とし，$E = (e_1, \ldots, e_n)$ を V の基底とする．このとき，E の任意の異なる 2 つの元が直交し，E のすべての元が単位ベクトルであるとき，E は**正規直交基底**であるという．

定義 37. $(V, g), (W, h)$ を 2 つの計量ベクトル空間とする．同型写像 $T : V \to W$ で，任意の $u, v \in V$ に対して $\langle Tu, Tv \rangle_W = \langle u, v \rangle_V$ を満たすものがあるとき，計量ベクトル空間 (V, g) と (W, h) は**計量同型**であるといい，$(V, g) \cong (W, h)$ あるいは単に $V \cong W$ とかく．

A.2.2　計量と行列

(V, g) を計量ベクトル空間とし，$\dim V = n < \infty$ とする．V の 1 つの基底 $E = (e_1, \ldots, e_n)$ を固定する．各 i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ とおくと，$u, v \in V$ を $u = \sum_i u^i e_i,\ v = \sum_i v^i e_i$ と表したとき，

$$g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} u^i v^i$$

が成り立つ．

定理 38. g_{ij} を (i, j) 成分とする n 次行列 $\hat{g} = (g_{ij})_{i,j}$ は正則対称行列である．

定理 39. V の任意の 1 つの基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ を固定する．このとき，任意の n 次正則対称行列 $A = (A_{ij})_{i,j}$ に対して，$g_A(e_i, e_j) = A_{ij}$, $(1 \leq i, j \leq n)$ を満たす計量 g_A が一意に存在する．

A.2.3　双対空間の計量

定理 40. V を有限次元計量ベクトル空間とする．このとき，任意の $F \in V^*$ に対してベクトル $v_F \in V$ が一意的に存在して，任意の $u \in V$ に対して $Fu = \langle v_F, u \rangle$ が成り立つ．

定義 41. (V, g) を n 次元計量ベクトル空間，$(e_i)_{i=1}^n$ を V の基底，$(f^i)_{i=1}^n$ をその双対基底とする．このとき，写像 $g_* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ を，$\psi, \eta \in V^*$ を $\psi = \sum_i \psi_i f^i$，$\eta = \sum_i \eta_i f^i$ $(\psi_i, \eta_i \in \mathbb{R})$ と展開することで，

$$g_*(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_i \eta_i g(e_i, e_j)$$

と定義する．この写像 g_* は V^* 上の計量となり，よって (V^*, g_*) は計量ベクトル空間である．計量 g_* を g に**付随する計量**とよぶ.

定理 42. (V, g) を n 次元計量ベクトル空間とする．写像 $i_* : V^* \to V$ を，定理 40 の記号を用いて $i_*(F) = v_F$，$F \in V^*$ と定義する．このとき，i_* は (V^*, g_*) から (V, g) への計量同型写像である．この同型を (V^*, g_*) と (V, g) の**標準同型**という．

A.2.4　テンソル空間の計量

(V, g) を n 次元計量ベクトル空間とし，$(e_i)_{i=1}^n$ を V の基底とする．

補題 43. 写像 $g_p : (\bigotimes^p V) \times (\bigotimes^p V) \to \mathbb{R}$ を，$T, S \in \bigotimes^p V$ を $T = \sum T^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$，$S = \sum S^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ と展開することにより，

$$g_p(T, S) = \sum T^{i_1 \cdots i_p} S^{j_1 \cdots j_p} g(e_{i_1}, e_{j_1}) \cdots g(e_{i_p}, e_{j_p})$$

と定義する．このとき，g_p は $\bigotimes^p V$ の計量となり，これは基底のとり方によらない．

定理 44. $(e_i)_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とする．このとき，

- $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \mid i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n\}$ は $\bigotimes^p V$ の正規直交基底である．
- $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ は $\bigwedge^p V$ の正規直交基底である．

A.2.5　演算積

定義 45. V の n 次元計量ベクトル空間，$1 \leq p \leq n$ とする．任意の $v \in V$ と $T = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \in \bigwedge^p V$ に対して**演算積** $vT, Tv \in \bigwedge^{p-1} V$ を，

$$vT = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle v, u_i \rangle u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u_i} \wedge \cdots \wedge u_p$$
$$Tv = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i} \langle v, u_{p-i} \rangle u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u_{p-i}} \wedge \cdots \wedge u_p$$

によって定義する．ここで，$\hat{u_i}, \widehat{u_{p-i}}$ はそれぞれ和において u_i, u_{i-p} を除くことを意味する．

A.2.6　ホッジ $*$ 作用素

定義 46. V を n 次元ベクトル空間とする．

1. $\bigwedge^n V$ は 1 次元ベクトル空間であるから，任意の $\bigwedge^n V$ の 2 つの 0 でない元 ω, ω' は 1 次従属．すなわち，$\omega = a\omega'$ となる $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき，$a > 0$ なら ω と ω' は**同じ向き**をもつといい，$a < 0$ なら ω と ω' は**逆の向き**をもつという．
2. ω と ω' が同じ向きを持つとき $\omega \sim \omega'$ と定義すれば，これは $(\bigwedge^n V) \setminus \{0\}$ における同値関係になる．この同値関係による商 $\bigwedge^n V/\sim$ は 2 つの元からなり，これらを**向き**とよぶ．一方の向きを**正の向き**としたとき，もう一方の向きを**負の向き**という．
3. 正の向きに属する $\bigwedge^n V$ の元を**正の元**，負の向きに属する元を**負の元**という．
4. V の基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に対して，$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \bigwedge^n V$ が正の元のとき，E を**正の基底**といい，負の元のとき E を**負の基底**という．

補題 43 での計量 g_p を単に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とかく．以下，V を n 次元ベクトル空間とし，$\bigwedge^n V$ の基底 τ_n で $|\langle \tau_n, \tau_n \rangle| = 1$ を満たすものを任意に一つ固定する．

定理 47. 各 $0 \leq p \leq n$ に対して，線形写像 $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ で任意の $T \in \bigwedge^p V$ と $S \in \bigwedge^{n-p} V$ に対し $T \wedge S = \langle *T, S \rangle \tau_n$ を満たすものが一意的に存在する．この線形写像 $*$ を**ホッジ $*$ 作用素**という．

定理 48. V が内積空間でもあるとき，$T \in \bigwedge^p V$ に対して，

$$**T = (-1)^{p(n-p)} T$$

が成り立つ．

定理 49. V は 3 次元内積空間で，固定した向きに属する正規直交基底 $E = (e_1, e_2, e_3)$ が 1 つ固定されているとする．このとき，$T \in \bigwedge^3 V$ の E に関する成分を T_0 としたとき，任意の $u \in V$ に対して

$$*(Tu) = T_0 u$$

が成り立つ．

A.3　外微分作用素，余微分作用素

この節を通して，V は n 次元計量ベクトル空間，$D \subset V$ を V の開集合とする．

A.3.1　微分形式

$(e_i)_{i=1}^n$ を V の任意の基底とすると，$x \in V$ は $x = \sum_i x^i e_i$ と展開される．このとき，対応 $\iota_V : V \ni x \mapsto (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ により V と $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間として同型になり，さらに V と $\mathbb{R}^n$ を内積空間とみなしたとき ι_V は同相写像になる．これにより，任意の関数 $F : D \to \mathbb{R}$ は関数 $\tilde{F} : \iota_V(D) \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto F(\sum_i x^i e_i)$ と同一視できる．

定義 50. $F : D \to \mathbb{R}$ に対して，F を上に述べた関数 $\tilde{F}$ と同一視するとき，$\tilde{F}$ が $\iota_V(D)$ 上で C^∞ 級なら，F は C^∞ **級**であるという．D 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(D)$ とかく．

定義 51. $0 \le p \le n$ とする．写像 $\psi : D \to \bigwedge^p V^*$ を D 上の p **次微分形式**（反対称 p 階共変テンソル場）という．

定義 52. (i) 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で C^1 級（ニュートン力学の pdf の定義 48）であるとき，各 $x \in V$ に対して線形写像 $df(x) : V \to \mathbb{R}$ を，$df(x)(y) = f'_y(x)$ $(y \in V)$ として定義する．

(ii) 写像 $df : D \to V^*; x \mapsto df(x)$ を f の**微分形式**という．

V の基底 $(e_i)_{i=1}^n$ を固定すると, $x \in D$ の展開 $x = \sum_i x^i e_i$ に付随して D 上の**座標関数** $f^i : D \to \mathbb{R}; x \mapsto x^i$ が各 $1 \le i \le n$ に対して定まる．このとき，$(\phi^i)_{i=1}^n$ を $(e_i)_{i=1}^n$ の双対基底とすると，$df^i(x) = \phi^i$ $(1 \le i \le n)$ が成り立つ．そこで，座標関数 f^i を単に x^i とかく．すなわち $(dx^i)_{i=1}^n$ は $(e_i)_{i=1}^n$ の双対基底を与える．

以上の議論より，$\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}$ は $\bigwedge^p V^*$ の基底になる．したがって，D 上の p 次微分形式 ψ は次のように展開できる：

$$\psi(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \psi_i i_1 \cdots i_p(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},\ x \in D$$

定義 53. (i) p 次微分形式 ψ のすべての成分関数 $\psi_i i_1 \cdots i_p$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ が C^∞ 級であるとき，C^∞ **級**であるという．

(ii) D 上の C^∞ 級 p 次微分形式全体の集合を $A^p(D)$ とかく．ただし $A^0(D) = C^\infty(D)$．これらは写像の和とスカラー倍に関してベクトル空間をなす．

(iii) $A(D) = \bigoplus_{p=1}^n A^p(D)$ とおく．

$i_* : V^* \to V$ を V^* と V の間の標準同型とする．このとき，$(f^i)_{i=1}^n$ が V^* の正規直交基底とすれば $(i_* f^i)_{i=1}^n$ は V の正規直交基底である．したがって，ベクトル空間の同型写像 $i_{*,p} : \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^p V$ で

$$i_{*,p}(f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_p}) = (i_* f^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (i_* f^{i_p}),\ i_1 < \cdots < i_p$$

を満たすものが一意的に存在する．この $i_{*,p}$ は計量同型になる．

定義 54. (i) 写像 $\psi : D \to \bigwedge^p V$ を**反対称** p **階反変テンソル場**という．

(ii) C^∞ 級反対称 p 階反変テンソル場全体の集合を $A^p(D, V)$ とかく．同型写像 $i_{*,p}$ は $A^p(D)$ から $A^p(D, V)$ へのベクトル空間としての同型を誘導する．

(iii) $A(D, V) = \bigoplus_{p=1}^n A^p(D, V)$ とおく．

A.3.2　外微分作用素

定理 55. 各 $0 \le p \le n$ に対して，線形写像 $d : A^p(D) \to A^{p+1}(D)$（ただし $A^{n+1}(D) = \{0\}$）で以下の条件を満たすものが一意的に存在する．

1. 任意の $f \in A^0(D)$ に対して，df は f の微分形式である．
2. 任意の $\psi \in A^p(D)$, $\phi \in A^q(D)$ $(0 \le p, q \le n)$ に対して，$d(\psi \wedge \phi) = (d\psi) \wedge \phi + (-1)^p \psi \wedge d\phi$ が成り立つ．
3. 任意の $\psi \in A^p(D)$ $(0 \le p \le n)$ に対して，$d(d\psi) = 0$ が成り立つ．

定義 56. 定理 55 の線形写像 d を $A(D)$ における**外微分作用素**といい，$\psi \in A^p(D)$ に対して $d\psi$ を ψ の**外微分**という．

定義 57. $i_{*,p}$ を $A^p(D)$ から $A^p(D,V)$ への同型写像とみなす．このとき，写像 $\tilde{d} : A^p(D,V) \to A^{p+1}(D,V)$ を $\tilde{d} = i_{*,p} \circ d \circ i_{*,p}^{-1}$ と定義し，$A(D,V)$ における**外微分作用素**という．

定理 58 (双対ベクトル場の外微分の展開)**.** $\psi : D \to V^*$ とし，$\psi = \sum_i \psi_i dx^i$ と展開する．このとき，

$$d\psi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

が成り立つ．

A.3.3　余微分作用素

$\bigwedge^n V^*$ の基底 ω_n で $|\langle \omega_n, \omega_n \rangle| = 1$ を満たすものを 1 つ固定する．これが属する向きに関するホッジ $*$ 作用素を $*$ とする．

定義 59. 写像 $\delta : A^p(D) \to A^{p-1}(D)$ を，(i) $p \geqq 1$ のとき $\delta = (-1)^{np+n+1} * \circ d \circ *$，(ii) $p = 0$ のとき $\delta = 0$ と定義し，これを**余微分作用素**という．$\phi \in A^p(D)$ に対する $\delta\phi$ を ϕ の**余微分**という．

$A^p(D,V)$ に対しても外微分作用素の場合と同様に定義する．

定義 60. (W, g) を任意の計量ベクトル空間とする．このとき，$u \in W$ で $g(u,u) \neq 0$ なる元に対し，$\varepsilon(u) \in \mathbb{R}$ を，

$$\varepsilon(u) = \frac{g(u,u)}{|g(u,u)|}$$

と定義し，u の**符号**という．

定理 61 (双対ベクトル場の余微分の展開)**.** $\psi : D \to V^*$ とし，$\psi = \sum_i \psi_i dx^i$ と展開する．このとき，

$$\delta\psi = -\varepsilon(\omega_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x^i} \varepsilon(dx^i)$$

が成り立つ．

A.4　grad と div

定理 62. $(e_i)_{i=1}^n$ を V の正規直交基底，$f : D \to V$ を C^1 級関数とする．このとき，$\operatorname{grad} f$（ニュートン力学の pdf の定義 50）は $x \in D$ を $x = \sum_i x^i e_i$ と展開することで，

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) e_i$$

と展開される．

定理 63. V を内積空間とすると，$f : D \to \mathbb{R}$ に対して $df = \operatorname{grad} f$ が成り立つ．

定義 64. V を内積空間とし，向きを 1 つ固定する．このとき，$\psi : D \to V$ に対して**発散** $\operatorname{div} \psi$ を，

$$\operatorname{div} \psi = -\delta\psi$$

と定義する．

定理 65. V を内積空間，$(e_i)_{i=1}^n$ を V の正規直交基底，その双対基底を $(f^i)_{i=1}^n$ とし，$\psi : D \to V$ とする．このとき，発散 $\operatorname{div}\psi$ は，$\psi = \sum_i \psi_i f^i$ と展開することで，

$$\operatorname{div}\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x^i}$$

と展開される．

定義 66. V の向きを 1 つ固定する．このとき，$\Delta_{\mathrm{LB}} : A^p(D) \to A^p(D)$ を $\Delta_{\mathrm{LB}} = d\delta + \delta d$ と定義し，**ラプラス-ベルトラミ作用素**という．

定理 67. V を内積空間，$(e_i)_{i=1}^n$ を V の正規直交基底とし，$\psi : D \to V^*$ とする．このとき $\Delta_{\mathrm{LB}}\psi = -\Delta\psi$，すなわち

$$\delta d\psi = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\psi) - \Delta\psi$$

が成り立つ．ここで，$\Delta\psi$ は $\psi = \sum_i \psi_i dx^i$ と展開したとき

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} \right) dx^i$$

と定義される．

定理 68. V を 4 次元ミンコフスキーベクトル空間（定義 19）とし，V^* の正規直交基底 $(dx^i)_{n=0}^3$ で $\langle dx^0, dx^0 \rangle = 1$，$\langle dx^i, dx^i \rangle = -1$ $(1 \le i \le 3)$ となるものをとる．このとき，$\psi : D \to V^*$ に対して，

$$\Delta_{\mathrm{LB}}\psi = \Box\psi$$

が成り立つ．ここで，$\Box\psi$ は $\psi = \sum_{i=0}^3 \psi_i dx^i$ と展開したとき

$$\Box\psi = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial {x^0}^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial {x^j}^2} \right) dx^i$$

と定義される．

A.5　ポアンカレの補題

V を n 次元計量ベクトル空間とする．

定義 69. $D \subset V$ を V の開集合とする．任意の $x \in V$ に対して $\{tx \mid t \in [0,1]\} \subset D$ となるとき，D は原点を中心とする**星型集合**であるという．

定理 70 (ポアンカレの補題)**.** D を V の原点を中心とする星型集合とする．このとき，$\psi \in A^p(D)$ が $d\psi = 0$ を満たすなら，$\psi = d\phi$ なる $\phi \in A^{p-1}(D)$ が存在する．

参考文献

[1] 新井朝雄『物理現象の数学的諸原理』，共立出版，2003.