ニュートン力学

Re_menal

2021 年 5 月 23 日

目次

この文書では，ニュートン力学の公理論的な定式化や，ニュートンの運動方程式の解空間の対称性について述べる．

全体を通して，単に「ベクトル空間」,「内積空間」といったときにはそれぞれ有限次元実ベクトル空間，有限次元実内積空間を意味するとする．また，集合 X, Y に対して，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ で X から Y への写像全体のなす集合，id_X で恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ を表す．

1 アフィン空間

定義 1. V を d 次元ベクトル空間，A を集合とする．写像 $T : V \to \mathrm{Hom}(A, A)$ で次の条件を満たすものが存在するとき，組 (A, V) を d **次元アフィン空間**という．

- 任意の $u, v \in V$ に対して，$T(u) \circ T(v) = T(u + v)$ が成り立つ．
- 任意の $P, Q \in A$ に対して，ある $u \in V$ が一意的に存在して $T(u)(P) = Q$ が成り立つ．また，この u を $Q - P$ と書く（これは V の元であり，A の元と混同しないよう注意されたい）．

このとき，V を A に**付随するベクトル空間**と呼ぶ．また，A の元を A の**点**ともいう．以降，簡単のためにアフィン空間 (A, V) を単に A と書くこともある．

定義 2. アフィン空間 A の元 P に対し，$Q - P \in V$ $(Q \in A)$ の形の V の元を**点 P を始点とする束縛ベクトル**という．

定義 3. V を d 次元内積空間とし，その内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_V$ と書く（定理 47）．このとき，付随するベクトル空間を V とするアフィン空間 A に対して，写像 $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ を，

$$d_A(P, Q) = \|Q - P\|_V, \quad (P, Q \in A)$$

と定めれば d_A は A 上の距離になる．この距離 d_A によって A を距離空間とみなしたものを d **次元ユークリッド空間**といい，$\mathbb{E}^d$ で表す．

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ の 1 点 O を固定すれば，$\mathbb{E}^d$ の任意の点 P は $P = T(x)(O)$, $x \in V$ と表せる．よって，この意味で $\mathbb{E}^d$ の点と V の元を同一視できる．

以降，1 つ d 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{E}^d, V)$ を固定して，それに付随する内積空間 V の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し，上に述べた方法で $\mathbb{E}^d$ の点と V の元を同一視する．

2 空間と時間

2.1 空間

定義 4. d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ を**古典的物理空間**という．

この定義のように，ニュートン力学では物理現象を考える空間の数学的モデルとして d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ を採用する．

2.2 時間

定義 5. 実数全体 $\mathbb{R}$ を標準内積によって 1 次元内積空間とみなしたとき，これを**古典的時間**といい，元 $t \in \mathbb{R}$ を**時刻**という．

この定義のように，ニュートン力学では時間概念の数学的モデルとして 1 次元内積空間 $\mathbb{R}$ を採用する．

注意. 以上の空間と時間の定義は自然なものであるように思えるが，空間と時間が独立であることが暗に仮定されている．実は，相対性理論により空間と時間は不可分なものであるということが示される（らしいが，筆者はまだこのことについては学んでいない）.

3　力と運動

3.1　力

定義 6. $x \in V$ をユークリッド空間 $\mathbb{E}^d$ の点とみなしたとき，点 x を始点とする束縛ベクトルを**点 x を作用点とする力**といい，$F(x)$ で表す.

この定義は,

- 「力」には，それが作用する点が存在する.
- 「力」は向きと大きさを持つ．よって有向線分で表すことができる.
- （ニュートンの第 4 法則）同一点に作用する 2 つの「力」は，それぞれを表す 2 つの有向線分が作る平行四辺形の対角線により表される 1 つの「力」に等しい.

という「力」についての経験則から導かれる．上の定義はこれらの経験則を意識した定義であるが，より一般の形に書き直せば次のようになる.

定義 7. D を V の開集合としたとき，写像 $F : D \to V$ を D 上の**力**という.

ここで，今 V の開集合 D 上で力 F を定義したが，F の D の外での値を適当に定めれば F は V 全体で定義された写像に拡張できる．よって，最初から力 F は V 全体で定義されている写像 $F : V \to V$ であるとしても一般性は失われない．以下，簡単のため，このように力は V 全体で定義されたものとして考える.

3.2　運動

定義 8. I を $\mathbb{R}$ の区間とする．このとき，連続写像 $X : I \to V$ を V における**運動**という.

ニュートン力学においては以下の条件を仮定する.

仮定 9. V における運動 $X : I \to V$ は C^2 級である.

この仮定により次の定義が可能である.

定義 10. (i) 写像 $v : I \to V$ を,

$$v(t) = \frac{d}{dt}X(t) \ (t \in I)$$

で定義し，運動 $X : I \to V$ の**速度**という.

(ii) 写像 $a : I \to V$ を,

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \ (t \in I)$$

で定義し，運動 $X : I \to V$ の**加速度**という．

3.3 質点

定義 11. (i) 正の実数 $m > 0$ と V 上の力 $F : V \to V$ の組 (m, F) を**質点** m **に作用する力**という．これを単に F で書く場合もある．

(ii) 正の実数 $m > 0$ と V における運動 $X : I \to V$ の組 (m, X) を V における**質点** m **の運動**という．

(iii) 質点 m の運動 $X : I \to V$ に対して，写像 $p : I \to V$ を $p(t) = mv(t)$ $(t \in I)$ と定義し，質点 m の**運動量**という．

4 ニュートンの運動方程式と保存則

4.1 運動方程式

仮定 12 (ニュートンの第 2 法則)**.** 質点 m に作用する力 $F : V \to V$ が与えられたとき，

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = F(X(t))\ (t \in I)$$

を満たすような区間 I と運動 $X : I \to V$ が存在する．この微分方程式を，質点 m に作用する力 F に対する**ニュートンの運動方程式**という．

与えられた質点 m に作用する力 $F : V \to V$ から，ニュートンの第 2 法則を利用して，すなわちニュートンの運動方程式を解いて質点 m の運動の解析を行うのがニュートン力学の 1 つの目標である．

注意. 仮定 12 はつまり，ニュートン力学ではニュートンの運動方程式の解 $X : I \to V$ が存在するような質点 m に作用する力 (m, F) だけを考えるということである．一般に，ニュートンの運動方程式の形の微分方程式に解が存在するためには写像 $F : V \to V$ がしかるべき条件をみたさなければならない．ただ，この文書ではニュートンの運動方程式の解の存在条件などについては扱わない．

定義 13. 質点 m に作用する力 $F : V \to V$ と, それに対するニュートンの運動方程式を満たす運動 $X : I \to V$ の組 (m, F, X) を**質点系**という．

4.2 保存則

定義 14. (m, F, X) を質点系，A を集合，$f : V \times V \times I \to A$ を写像とする．このとき，$t \in I$ に対し $C(t) \coloneqq f(X(t), v(t), t) \in A$ が t によらず一定であるとき，$C = f(X(\cdot), v(\cdot), \cdot) : I \to A$ を質点系 (m, F, X) の**保存量**という．

4.2.1 運動量保存

定理 15 (運動量保存則)**.** (m, F, X) を質点系とし，任意の $t \in I$ に対し $F(X(t)) = 0$ が成り立つとする．このとき，運動量 $p : I \to V$ は質点系 (m, F, X) の保存量である．

Proof. 仮定を用いて (m, F) に対するニュートンの運動方程式を変形すれば，$t \in I$ に対して，

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = 0 \iff \frac{d}{dt}p(t) = 0.$$

よって $p(t)$ は質点系の保存量である． $\square$

4.2.2 力学的エネルギー保存

定義 16. V 上の力 $F : V \to V$ に対して，関数 $U : V \to \mathbb{R}$ が存在して $F = -\operatorname{grad} U$ とかけるとき，F を**保存力**という．また，U を F の**ポテンシャル**という．

定義 17. (m, F, X) を質点系とする．

(i) 関数 $T : I \to \mathbb{R}$ を，$t \in I$ に対して実数 $T(t) = \frac{1}{2}m\|v(t)\|^2$ を対応させることで定める．T を質点系の**運動エネルギー**という．

(ii) 力 F が U をポテンシャルとする保存力であるとき，関数 $E : I \to \mathbb{R}$ を $t \in I$ に対して実数 $E(t) = T(t) + U(X(t))$ を対応させることで定める．E を質点系の**力学的エネルギー**という．

定理 18 (力学的エネルギー保存則)**.** (m, F, X) を質点系とし，F は保存力であるとする．このとき，力学的エネルギー $E : I \to \mathbb{R}$ は質点系 (m, F, X) の保存量である．

Proof. (m, F) に対するニュートンの運動方程式と $v(t)$ との内積をとると，

$$\begin{aligned} m\left\langle \frac{d}{dt}v(t), v(t) \right\rangle &= \langle F(X(t)), v(t) \rangle \\ \iff \quad \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\| &= \langle F(X(t)), v(t) \rangle \end{aligned}$$

となる．ここで，変形に公式

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 = 2\langle v(t), v'(t) \rangle$$

を用いた．このとき，$t_0, t_1 \in I$ として上式の両辺を t_0 から t_1 まで積分すれば，

$$\frac{1}{2}m\|v(t_1)\|^2 - \frac{1}{2}m\|v(t_0)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} \langle F(X(t), v(t) \rangle \; dt$$

を得る．仮定より F は保存力であったから，あるポテンシャル U が存在して $F = -\operatorname{grad} U$ を満たす．この表示を上の積分に適用すると，付録 A の定理 54 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\|v(t)\|^2 - \frac{1}{2}m\|v(t_0)\|^2 &= -\int_{t_0}^{t_1} \langle \operatorname{grad} U(X(t)), v(t) \rangle \; dt \\ &= -U(X(t_1)) + U(X(t_0)). \end{aligned}$$

よって $E(t_1) = E(t_0)$ を得る．$t_0, t_1 \in I$ は任意であったから，E が I において一定であることがわかった・ $\square$

4.2.3 角運動量保存

定義 19. V における力 $F : V \to V$ に対して, 関数 $\Phi : V \to \mathbb{R}$ が存在して任意の $x \in V$ に対し $F(x) = \Phi(x)x$ とかけるとき，F を**中心力**という．

定義 20. (m, F, X) を質点系とする．このとき，写像 $L : I \to \bigwedge^2 V$ を $t \in I$ に対して 2 階反対称テンソル $L(t) = X(t) \wedge p(t)$ を対応させることで定める．L を質点系の原点まわりの**角運動量**という．

定理 21 (角運動量保存則)**.** (m, F, X) を質点系とし，F を中心力とする．このとき，角運動量 $L : I \to \bigwedge^2 V$ は質点系 (m, F, X) の保存量である．

Proof. F は中心力であるから，ある関数 $\Phi : V \to \mathbb{R}$ が存在して任意の $x \in V$ に対して $F(x) = \Phi(x)x$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &= \frac{d}{dt}X(t) \wedge p(t)\\ &= v(t) \wedge p(t) + X(t) \wedge \frac{d}{dt}p(t)\\ &= X(t) \wedge F(X(t))\\ &= \Phi(X(t))(X(t) \wedge X(t))\\ &= 0\end{aligned}$$

となる（1 行目から 2 行目の変形には定理 58 を用いた）．したがって L は $t \in I$ によらないことがわかった． □

5 運動の対称性

定義 22. (m, F) を質点 m に作用する力 $F : V \to V$，I を $\mathbb{R}$ の区間とする．このとき，運動 $X : I \to V$ で (m, F) に対するニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = F(X(t)), \quad (t \in I)$$

をみたすもの全体の集合を $\mathcal{N}_F(I)$ で表す．

5.1 時間反転対称性

この節では，区間 I は全区間 $\mathbb{R}$ か閉区間 $[a, b]$ を表すことにする．実数 p を，(i)$I = [a, b]$ の場合 $p = \frac{a+b}{2}$，(ii)$I = \mathbb{R}$ の場合任意の実数として定める．

定義 23. 写像 $r_p : I \to I$ を，$t \in I$ に対し $r_p(t) = 2p - t$ とすることで定める．この写像 r_p を時刻 p に対する**時間反転**という．また，$T_{\mathrm{rev}} = \{\mathrm{id}_I, r_p\}$ とおき，これを**時間反転群**という．

補題 24. 時間反転群 T_{rev} は合成を演算とする群である．

Proof. (i) 式 $\mathrm{id}_I \circ r_p = r_p \circ \mathrm{id}_I = r_p$ と $\mathrm{id}_I \circ \mathrm{id}_I = \mathrm{id}_I$ は明らかに成り立つ．よって id_I が T_{rev} の単位元である．

(ii) T_{rev} の元は単位元 id_I と r_p の 2 つしかないから，結合律は明らかである．

(iii) 式 $\mathrm{id}_I \circ \mathrm{id}_I = \mathrm{id}_I$ は id_I の逆元が id_I であることを示している．また，$t \in I$ に対して $(r_p \circ r_p)(t) = 2p - (2p - t) = t = \mathrm{id}_I(t)$ より，r_p の逆元は r_p 自身である． □

補題 25. $X \in \mathcal{N}_F(I)$ とすると，任意の $g \in T_{\mathrm{rev}}$ に対して $X \circ g^{-1} \in \mathcal{N}_F(I)$ である．

Proof. $g = \mathrm{id}_I$ なら明らかであるから $g = r_p$ の場合を考える．$t \in I$ に対し $(X \circ r_p^{-1})(t) = X(2p - t)$ であるが，実数 p の定義から $2p - t \in I$．ゆえに $X \in \mathcal{N}_F(I)$ から $X(2p - t) \in \mathcal{N}_F(I)$ となる． □

上の補題から写像 $\phi_{T_{\mathrm{rev}}} : T_{\mathrm{rev}} \times \mathcal{N}_F(I) \to \mathcal{N}_F(I)$ が $(g, X) \mapsto X \circ g^{-1}$ として定まる．

定理 26 (運動の時間反転対称性)**.** 時間反転群 T_{rev} は写像 $\phi_{T_{\mathrm{rev}}}$ により $\mathcal{N}_F(I)$ に作用する．

Proof. (i) 任意の $X \in \mathcal{N}_F(I)$ に対して $\phi_{T_{\mathrm{rev}}}(\mathrm{id}_I, X) = X \circ \mathrm{id}_I^{-1} = X$ である．

(ii) $g, h \in T_{\mathrm{rev}}$，$X \in \mathcal{N}_F(I)$ とすると，

$$\begin{aligned}\phi_{T_{\mathrm{rev}}}(g, \phi_{T_{\mathrm{rev}}}(h, X)) &= \phi_{T_{\mathrm{rev}}}(g, X \circ h^{-1}) \\ &= (X \circ h^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= X \circ (g \circ h)^{-1} \\ &= \phi_{T_{\mathrm{rev}}}(g \circ h, X).\end{aligned}$$

以上より $\phi_{T_{\mathrm{rev}}}$ が作用となることがわかった． □

5.2 時間並進対称性

区間 I と実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$I + a \coloneqq \{t + a \mid t \in I\}$ とおく．

定義 27. 実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し写像 $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f_a(t) = t + a$ $(t \in \mathbb{R})$ として定める．この写像 f_a を a 秒の**時間並進**という．また，$T_{\mathrm{tr}} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ とおき，これを**時間並進群**という．

補題 28. 時間並進群 T_{tr} は合成を演算とする群である．

Proof. (i) 任意の $f_a \in T_{\mathrm{tr}}$ に対し，明らかに $f_0 \circ f_a = f_a \circ f_0 = f_a$ が成り立つ．よって f_0 が T_{tr} の単位元である．

(ii) 任意の $f_a, f_b, f_c \in T_{\mathrm{tr}}$ に対し，$t \in I$ とすれば $(f_a \circ (f_b \circ f_c))(t) = t + (c + b) + a = t + c + (b + a) = ((f_a \circ f_b) \circ f_c)(t)$．したがって結合律が成り立つ．

(iii) 任意の $f_a \in T_{\mathrm{tr}}$ に対し，$f_a \circ f_{-a} = f_{-a} \circ f_a = f_0$ が成り立つから，f_a の逆元は f_{-a} である． □

定義 29. $f_a \in T_{\mathrm{tr}}$ に対して写像 $\hat{f}_a : \mathrm{Hom}(I, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(I + a, \mathbb{R})$ を $X \mapsto X \circ f_a^{-1}$ として定める．

定理 30 (運動の時間並進対称性)**.** 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，写像 $\hat{f}_a$ の制限として全単射 $\mathcal{F}_a : \mathcal{N}_F(I) \to \mathcal{N}_F(I + a)$ が定まる．

Proof. $t \in I$ のとき $f_a^{-1}(t) = t - a$ は $I + a$ に属するから $X \in \mathcal{N}_F(I)$ のとき $X \circ f_a^{-1} \in \mathcal{N}_F(I + a)$ となる．ゆえに題意の通り $\mathcal{F}_a$ が定まる．全単射性は f_a のそれより明らかである． □

上の定理から，写像 $\phi_{T_{\mathrm{tr}}} : T_{\mathrm{tr}} \times \mathcal{N}_F(\mathbb{R}) \to \mathcal{N}_F(\mathbb{R})$ が $(f_a, X) \mapsto X \circ f_a^{-1}$ として定まる．

定理 31 (運動の大局的時間並進対称性)**.** 時間並進群 T_{tr} は写像 $\phi_{T_{\mathrm{tr}}}$ によって $\mathcal{N}_F(\mathbb{R})$ に作用する．

Proof. (i) 任意の $X \in \mathcal{N}_F(\mathbb{R})$ に対して $\phi_{T_{\mathrm{tr}}}(f_0, X) = X \circ f_0^{-1} = X$ である．

(ii) 任意の $f_a, f_b \in T_{\mathrm{tr}}$ と任意の $X \in \mathcal{N}_F(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_{T_{\mathrm{tr}}}(f_a, \phi_{T_{\mathrm{tr}}}(f_b, X)) &= \phi_{T_{\mathrm{tr}}}(f_a, X \circ f_b^{-1}) \\ &= (X \circ f_b^{-1}) \circ f_a^{-1} \\ &= X \circ (f_a \circ f_b)^{-1} \\ &= \phi_{T_{\mathrm{tr}}}(f_a \circ f_b, X).\end{aligned}$$

以上より $\phi_{T_{\mathrm{tr}}}$ が作用であることがわかった. □

5.3 回転対称性

V から V への同型写像全体のなす集合を $\mathrm{GL}(V)$ とかく. $\mathrm{GL}(V)$ は合成により群をなす.

定義 32. 集合 $\mathrm{SO}(V)$ を $\mathrm{GL}(V)$ の部分集合として $\mathrm{SO}(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid \det A = 1,$ 任意の $x, y \in V$ に対して $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\}$ と定義する. これを V 上の**回転群**という.

補題 33. V 上の回転群 $\mathrm{SO}(V)$ は合成を演算とする群である.

Proof. $A, B \in \mathrm{SO}(V)$ とすると, $1 = \det A \det B = \det(AB)$. また $\langle ABx, ABy \rangle = \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle$ であるから $\mathrm{SO}(V)$ は合成により閉じている.

(i) $\det \mathrm{id}_V = 1$ より $\mathrm{id}_V \in \mathrm{SO}(V)$ であり, これが $\mathrm{SO}(V)$ の単位元であることは明らか.

(ii) $\mathrm{GL}(V)$ が結合律を満たすから明らか.

(iii) $A \in \mathrm{SO}(V)$ の $\mathrm{GL}(V)$ での逆元 A^{-1} に対して $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1$ が成り立ち, また $\langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}x) \rangle = \langle x, y \rangle$ だから $A^{-1} \in \mathrm{SO}(V)$. □

定義 34. V 上の力 $F : V \to V$ が任意の $A \in \mathrm{SO}(V)$ に対して $F = A \circ F \circ A^{-1}$ を満たすとき, F は**回転対称**であるという.

補題 35. $X \in \mathcal{N}_F(I)$ とすると, F が回転対称なら任意の $A \in \mathrm{SO}(V)$ に対して $A \circ X \in \mathcal{N}_F(I)$ である.

Proof. 有限次元内積空間の間の線形写像が連続であることと F の回転対称性を用いれば

$$\begin{aligned}m\frac{d^2}{dt^2}(A \circ X)(t) &= A\left(m\frac{d^2}{dt^2}X(t)\right) \\ &= A(F(X(t))) \\ &= A(F((A^{-1} \circ A \circ X)(t))) \\ &= (A \circ F \circ A^{-1})((A \circ X)(t)) \\ &= F((A \circ X)(t))\end{aligned}$$

となる. よって $A \circ X \in \mathcal{N}_F(I)$ である. □

これにより, 上の補題の状況において写像 $\phi_{\mathrm{SO}(V)} : \mathrm{SO}(V) \times \mathcal{N}_F(I) \to \mathcal{N}_F(I)$ が $(A, X) \mapsto A \circ X$ として定まる.

定理 36 (運動の回転対称性)**.** F が回転対称なら, V 上の回転群 $\mathrm{SO}(V)$ は写像 $\phi_{\mathrm{SO}(V)}$ によって $\mathcal{N}_F(I)$ に作用する.

Proof. (i) 任意の $X \in \mathcal{N}_F(I)$ に対して $\phi_{\mathrm{SO}(V)}(\mathrm{id}_V, X) = \mathrm{id}_V \circ X = X$ である．

(ii) 任意の $A, B \in \mathrm{SO}(V)$ と任意の $X \in \mathcal{N}_F(I)$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{SO}(V)}(A, \phi_{\mathrm{SO}(V)}(B, X)) &= \phi_{\mathrm{SO}(V)}(A, B \circ X) \\ &= A \circ (B \circ X) \\ &= (A \circ B) \circ X \\ &= \phi_{\mathrm{SO}(V)}(A \circ B, X)\end{aligned}$$

以上より $\phi_{\mathrm{SO}(V)}$ が作用であることがわかった． □

5.4 空間反転対称性

定義 37. 写像 $R_V : V \to V$ を $R_V(x) = -x$ $(x \in V)$ として定める．この写像 R_V を V 上の**空間回転**という．また，$S_{\mathrm{rev}} = \{\mathrm{id}_V, R_V\}$ とおき，これを V 上の**空間反転群**という．

補題 38. V 上の空間反転群 S_{rev} は合成を演算とする群である．

Proof. (i) 式 $\mathrm{id}_V \circ R_V = R_V \circ \mathrm{id}_V = R_V$ と $\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$ は明らかに成り立つ．よって id_V が S_{rev} の単位元である．

(ii) S_{rev} の元は単位元 id_V と R_V の 2 つしかないから，結合律は明らかである．

(iii) 式 $\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$ は id_V の逆元が id_V であることを示している．また，$x \in V$ に対して $(R_V \circ R_V)(x) = -(-x) = x = \mathrm{id}_V(x)$ より，R_V の逆元は R_V 自身である． □

定義 39. V 上の力 $F : V \to V$ が $F = R_V \circ F \circ R_V^{-1}$ を満たすとき，F は**空間反転対称**であるという．

補題 40. $X \in \mathcal{N}_F(I)$ とすると，F が空間反転対称なら $R_V \circ X \in \mathcal{N}_F(I)$ である．

Proof. 補題 35 の証明と全く同様である． □

これにより，上の補題の状況において写像 $\phi_{S_{\mathrm{rev}}} : S_{\mathrm{rev}} \times \mathcal{N}_F(I) \to \mathcal{N}_F(I)$ が $(r, X) \mapsto r \circ X$ として定まる．

定理 41. F が空間反転対称なら，V 上の空間反転群 S_{rev} は写像 $\phi_{S_{\mathrm{rev}}}$ によって $\mathcal{N}_F(I)$ に作用する．

Proof. 運動の回転対称性の証明と全く同様である． □

5.5 空間並進対称性

定義 42. 各 $u \in V$ に対し写像 $T_u : V \to V$ を $T_u(x) = x + u$ $(x \in V)$ として定める．この写像 T_u を V 上の**空間並進**という．また，$S_{\mathrm{tr}} = \{T_u \mid u \in V\}$ とおき，これを V 上の**空間並進群**という．また，$T_u \in S_{\mathrm{tr}}$ に対し写像 $\hat{T_u} : \mathrm{Hom}(I, V) \to \mathrm{Hom}(I, V)$ を $X \mapsto T_u \circ X$ により定義する．

補題 43. V 上の空間並進群 S_{tr} は合成を演算とする群である．

Proof. (i) V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ とおくと，任意の $T_u \in S_{\mathrm{tr}}$ に対し $T_u \circ T_{\mathbf{0}} = T_{\mathbf{0}} \circ T_u = T_u$ が成り立つ．よって $T_{\mathbf{0}}$ が S_{tr} の単位元である．

(ii) 任意の $T_u, T_v, T_w \in S_{\mathrm{tr}}$ に対して，$x \in V$ とすれば $(T_u \circ (T_v \circ T_w))(x) = x + (w + v) + u = x + w + (v + u) = ((T_u \circ T_v) \circ T_w)(x)$．したがって結合律が成り立つ．

(iii) 任意の $T_u \in S_{\mathrm{tr}}$ に対し，$T_u \circ T_{-u} = T_{-u} \circ T_u = T_{\mathbf{0}}$ が成り立つから，T_u の逆元は T_{-u} である． □

定義 44. V 上の力 $F : V \to V$ が，ある $u \in V$ に対し $F = F \circ T_u^{-1}$ を満たすとき，F はベクトル u について**並進対称**であるという．

定理 45 (運動の空間並進対称性)**.** F がベクトル u について並進対称であるとき，写像 $\hat{T}_u$ の制限として全単射 $\mathcal{T}_u : \mathcal{N}_F(I) \to \mathcal{N}_F(I)$ が定まる．

Proof. $X \in \mathcal{N}_F(I)$ とすると，F のベクトル u についての並進対称性より $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}(T_u \circ X)(t) &= m\frac{d^2}{dt^2}X(t) \\ &= F(X(t)) \\ &= F((T_u \circ X)(t) - u) \\ &= F((T_u \circ X)(t)) \end{aligned}$$

となる．したがって $T_u \circ X \in \mathcal{N}_F(I)$ であり，よって $\hat{T}_u$ の制限として写像 $\mathcal{T}_u$ が定まる．全単射性は T_u の全単射性から明らか． □

付録 A　数学に関する補足

A.1　内積空間

定義 46. V をベクトル空間とする．写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ が次の条件をみたすとき，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を V 上の**内積**という．

1. 任意の $u, v \in V$ に対して $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ が成り立つ．
2. 任意の $u, v, w \in V$ に対して $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ が成り立つ．
3. 任意の $u, v \in V$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ が成り立つ．
4. 任意の $u \in V$ に対して $\langle u, u \rangle \geq 0$ が成り立つ．
5. 任意の $u \in V$ に対して，$\langle u, u \rangle = 0$ と $u = 0$ は同値である．

また，内積が定義されているベクトル空間を**内積空間**という．

定理 47. V を，内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ内積空間とする．このとき，$u \in V$ に対して $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ と定義すると $\| \cdot \|$ は V 上のノルムを定める．よって，写像 $d_V : V \times V \to \mathbb{R}$ を $u, v \in V$ に対し $d_V(u, v) = \|u - v\|$ と定義すれば d_V は V 上の距離となる．

通常，内積空間は上の定理のような方法で距離空間とみなす．

A.2　勾配，線積分

定義 48. (i) V を内積空間，D を V の開集合，$f : D \to \mathbb{R}$ とする．$x \in D$, $y \in V$ を固定したとき，極限

$$\lim_{h \neq 0, h \to 0} \frac{f(x+hy) - f(x)}{h}$$

が存在するなら，f は点 x において y **方向に微分可能**であるといい，上の極限を $f'_y(x)$ で表す．

(ii) $f : D \to \mathbb{R}$ に対して，任意の $x \in D$, $y \in V$ に対し $f'_y(x)$ が存在するとき，f は D 上で**微分可能**であるという．

(iii) $f : D \to \mathbb{R}$ が D 上で微分可能であり，任意の $y \in V$ に対し $f'_y(x)$ が x に関し D 上で連続であるとき，f は D において C^1 **級**であるという．

定理 49. V を内積空間，D を V の開集合，$f : D \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする．このとき，各 $x \in D$ に対して $v_f(x) \in V$ が一意的に存在して，

$$f'_y(x) = \langle v_f(x), y \rangle, \ y \in V$$

が成り立つ．

定義 50. 定理 49 より写像 $\operatorname{grad} f : D \to V; x \mapsto v_f(x)$ が定まる．この写像 $\operatorname{grad} f$ を f の**勾配**という．

定義 51. V を内積空間とする．このとき，$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a, b]$ から V への連続写像 $\gamma : [a, b] \to V$ を，点 $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ を結ぶ V 内の**曲線**という．

定義 52. (i) V を内積空間，$F : [a, b] \to V$ を写像とする．このとき，$t \in [a, b]$ を任意に定め，$D = \{h \in [a, b] \mid a - t \leq h \leq b - t, h \neq 0\}$ としたとき，極限

$$\lim_{h \in D, h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

が存在するなら，F は t において**微分可能**であるといい，その極限を $F'(t)$ と表す．この $F'(t)$ を t における F の**微分係数**という．

(ii) F が任意の $t \in [a, b]$ に対し t における微分係数 $F'(t)$ を持ち，かつ $F' : [a, b] \to V; t \mapsto F'(t)$ が連続であるとき，F は**滑らか**であるという．

(iii) 区間 $[a, b]$ を有限個の閉区間に分割したとき，その各閉区間で $F : [a, b] \to V$ が滑らかであるとき，F は**区分的に滑らか**であるという．

定義 53. V を内積空間，D を V の開集合，$X : D \to V$ を連続写像とする．C を，D 内の区分的に滑らかな写像 $F : [a, b] \to D$ によって表される曲線とする．このとき，X の C に沿っての**線積分**を，

$$\int_C \langle X(x), dx \rangle := \int_a^b \langle X(F(x)), F'(t) \rangle \ dt$$

と定義する．

定理 54 (微分積分学の基本定理)**.** V を内積空間，D を V の開集合，$f : D \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数，$x_0, x_1 \in D$ とする．このとき，x_0, x_1 が滑らかな曲線で結ばれるならば，x_0, x_1 を結ぶ D 内の区分的に滑らかな曲線 C

に対して，

$$\int_C \langle \mathrm{grad}\, f, dx \rangle = f(x_1) - f(x_0)$$

が成り立つ．

A.3　テンソル積と 2 階反対称テンソル

定義 55. ベクトル空間 V に対し，$V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ と定義し，V^* を V の**双対空間**という．V^* に加法とスカラー倍を，$f, g \in V^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad\qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in V)$$

と定義することで V^* はベクトル空間になる．

定義 56. (i) V, W をベクトル空間とする．このとき，$u \in V$ と $v \in W$ に対して，写像 $u \otimes v : V^* \times W^* \to \mathbb{R}$ を

$$(u \otimes v)(f, g) := f(u)g(v), \quad (f \in V^*,\ g \in W^*)$$

と定義する．また，集合 T を $T := \{u \otimes v \mid u \in V, v \in W\}$ と定める．

(ii) 上で定義した集合 T で生成されるベクトル空間を $V \otimes W$ とかき，V と W の**テンソル積**という．

定義 57. V をベクトル空間とする．

(i) $T \in V \otimes V$ とする．任意の $f, g \in V^*$ に対して $T(f, g) = -T(g, f)$ が成り立つとき，T を **2 階反対称テンソル**という．

(ii) 2 階反対称テンソル全体の集合を $\bigwedge^2 V$ で表す．

(iii) $u, v \in V$ に対し，2 階反対称テンソル $u \wedge v \in \bigwedge^2 V$ を

$$u \wedge v := \frac{1}{\sqrt{2}}(u \otimes v - v \otimes u)$$

と定義し，これを u と v の**外積**という．

定義から明らかに，任意の $u \in V$ に対して $u \wedge u = 0$ が成り立つ．

定理 58. V を内積空間，$F, G : [a, b] \to V$ をそれぞれ滑らかな写像とする．このとき，写像 $F \wedge G : [a, b] \to \bigwedge^2 V$ を $(F \wedge G)(t) = F(t) \wedge G(t)$ $(t \in [a, b])$ により定義すれば，$F \wedge G$ も滑らかな写像で，

$$\frac{d}{dt}(F \wedge G) = F' \wedge G + F \wedge G'$$

が成り立つ．

A.4　群の作用

定義 59. G を群，X を集合とする．写像 $\phi : G \times X \to X$ が次の条件を満たすとき，ϕ を G の X への**作用**という．

1. 任意の $x \in X$ に対して $\phi(1_G, x) = x$ が成り立つ（1_G は G の単位元である）．

2. 任意の $g, h \in G$ と任意の $x \in X$ に対して $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ が成り立つ.

G の X への作用があるとき, G は X に**作用する**という. このことを記号で $G \curvearrowright X$ とかくこともある.

注意. 上で定義した「作用」は通常**左作用**と呼ばれているものであり, 右作用という概念も存在するが, 本文で右作用は扱わないため単に「作用」とした.