積分の技法

るめなる

2020 年 10 月 28 日

1　初等関数の積分

不定積分での積分定数を省略する．

・初等関数の原始関数

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x|$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\frac{1}{\tanh x}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

・置換でよく使われるもの

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1)$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

2　置換など

置換積分法，部分積分法については高校数学の美しい物語などを見よ．

・King Property

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

3　特殊関数

3.1　ガンマ関数，ベータ関数

・ガンマ関数，ベータ関数の定義

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0)$$

・ベータ関数の別の表示

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$
$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$$
$$B(x,y) = \frac{1}{2^{x+y-1}}\int_{-1}^1 (1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

・ガンマ関数，ベータ関数の性質

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}B(x,y) = B(x,y)(\psi(x) - \psi(x+y))$$

・特殊値

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad\qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

3.2　ポリガンマ関数，多重対数関数，Dirichlet beta 関数

・ディガンマ関数，ポリガンマ関数の定義

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$
$$\psi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\psi(z)$$

・ディガンマ関数，ポリガンマ関数の性質

$$\begin{aligned}
&\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}\\
&\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot\pi z\\
&\psi^{(m)}(z+1)=\psi^{(m)}(z)+\frac{(-1)^m m!}{z^{m+1}}\\
&(-1)^m\psi^{(m)}(1-z)-\psi^{(m)}(z)=\pi\frac{d^m}{dz^m}\cot\pi z
\end{aligned}$$

・積分表示

$$\begin{aligned}
&\psi(y)-\psi(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}-t^{y-1}}{1-t}dt\\
&\psi^{(m)}(z)=(-1)^{m+1}\int_0^\infty\frac{t^m e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt\quad(m>0)
\end{aligned}$$

・特殊値

$$\psi(1)=-\gamma \qquad \psi\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2-\gamma$$

$$\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

・多重対数関数の定義

$$\mathrm{Li}_s(z)=\sum_{k=1}^\infty\frac{z^k}{k^s}$$

・積分表示

$$\mathrm{Li}_s(z)=\frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{e^t-z}dt\quad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

・Dirichlet beta 関数の定義

$$\beta(s)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

・積分表示

$$\beta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}e^{-x}}{1+e^{-2x}}dx\quad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

・特殊値

$$\beta(1)=\frac{\pi}{4} \qquad \beta(2)=G$$

$$\beta(3)=\frac{\pi^3}{32}$$

3.3 その他

・ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\quad(\mathrm{Re}\,s>1)$$

4　定数

4.1　アペリーの定数 $\zeta(3)$

・積分表示

$$\zeta(3) = \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx \qquad \zeta(3) = \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{1-x} dx$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x(1-x)} dx \qquad \zeta(3) = \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x+1} dx$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1} dx \qquad \zeta(3) = \frac{4}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln(\sec x + \tan x) dx$$

4.2　オイラーの定数 γ

・積分表示

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx \qquad \gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{xe^x} \right) dx$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \qquad \gamma = -\int_0^1 \ln\ln\frac{1}{x} dx$$

4.3　カタラン定数 G

・定義

$$G = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

・積分表示

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx \qquad G = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x}{\cosh x} dx$$

$$G = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx \qquad G = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

$$G = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin x) dx \qquad G = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\cos x) dx$$

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x) dx \qquad G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sec x + \tan x) dx$$

5　極限の交換

a, b を任意の実数，$f(x), g(x)$ を実数値（または複素数値）関数とする．

5.1　無限和との交換

関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

と表され，積分と和の順序が交換できる時，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx\end{aligned}$$

のように変形して，級数に帰着することができる．実際の計算では，被積分関数に含まれる三角関数などの初等関数をマクローリン展開し，積分と順序交換して計算する，ということが多い．初等関数のマクローリン展開については wikipedia など様々なサイトに書いてあると思われるので，それを紙にまとめておくとよい．

・例

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\ &= G\end{aligned}$$

5.2　微分との交換

α を任意の実数とした時，積分と微分の順序が交換できるなら，

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)\}^{\alpha} g(x) \ln f(x) dx &= \left. \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \{f(x)\}^t g(x) dx \right|_{t=\alpha} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_a^b \{f(x)\}^t g(x) dx \right|_{t=\alpha}\end{aligned}$$

のように変形して計算できる．

・例題 1

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}} dx \ = \ ?$$

5.3　積分との交換

α, β を任意の実数とした時，積分の順序が交換できるなら，

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{g(x)} dx &= \int_a^b \frac{1}{g(x)} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} f(xt) dt dx \\ &= \int_\alpha^\beta \int_a^b \frac{f'(xt)}{g(x)} dx dt\end{aligned}$$

のように変形して計算できる．

・例題 2

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} \ln x} dx \ = \ ?$$

6　例題の解答

・例題 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{\partial}{\partial t}x^t dx\bigg|_{t=-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^1 x^t(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx\bigg|_{t=-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{d}{dt}B\left(t+1,\frac{1}{2}\right)\bigg|_{t=-\frac{1}{2}} \\ &= B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi(1)\right) \\ &= \pi((-2\ln 2-\gamma)+\gamma) \\ &= -2\pi\ln 2\end{aligned}$$

・例題 2

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}\ln x}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\int_0^2 \frac{d}{dt}x^t dt dx \\ &= \int_0^1\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt{x}}dtdx \\ &= \int_0^2\int_0^1 x^{t-\frac{1}{2}}dxdt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{t+\frac{1}{2}}dt \\ &= \left[\ln\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_0^2 \\ &= \ln 5\end{aligned}$$

7　演習問題

・レベル 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \ \ = \ \ ?$$

・レベル 2

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^x}{\sinh x \cosh x} dx \ \ = \ \ ?$$

・レベル 3

$$\int_0^{1} \sin(\arccos x) \ln x dx \ \ = \ \ ?$$

・レベル 4

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x - x}{x^2 e^x} dx \ \ = \ \ ?$$