

# $(\infty, 1)$ -圏に対する基本的構成

Re-menal

2023年6月1日

## 概要

$(\infty, 1)$ -圏の理論は“同型として表現できるとは限らない同じさ”を基準にした圏論と思えることが知られており、幅広い応用を持つ。本文書では、 $(\infty, 1)$ -圏の具体的モデルとして擬圏 (quasi-category) を採用し、 $(\infty, 1)$ -圏に対する関手圏、スライス圏、コンマ圏の構成を説明する。

## 目次

はじめに	1
1 準備	3
1.1 射のリフト	4
1.2 弱飽和類	4
1.3 単体的集合の射のクラス	6
2 $(\infty, 1)$ -関手圏	8
2.1 単体的集合の関数複体	9
2.2 押し出し積と引き戻し冪	10
2.3 主定理	13
3 $(\infty, 1)$ -スライス圏	13
3.1 単体的集合のジョイン	14
3.2 単体的集合のスライス	17
3.3 押し出しジョインと引き戻しスライス	20
3.4 主定理	23
4 $(\infty, 1)$ -コンマ圏	24
付録 A 小対象論法	26
付録 B 単体的集合の組合せ論	30
B.1 単射の生成集合	30
B.2 内緩和射の生成クラス	32
B.3 押し出しジョインの計算	40

## はじめに

本文書では、 $(\infty, 1)$ -圏に対する関手圏、スライス圏、コンマ圏の構成と、それらが再び  $(\infty, 1)$ -圏をなすことの証明を行います。関手圏は 2 章にて、スライス圏は 3 章にて、コンマ圏は 4 章にて扱います。

構成は比較的簡単ですが、それらが再び  $(\infty, 1)$ -圏になることを示すには通常の圏の場合に比べると多くの準備が必要です。特に、いくつかの単体的集合の射のクラスとその性質を調べることが重要になります。本文書で扱う単体的集合の射のクラスは 1 章の最後の 1.3 節で導入します。そのために必要な事柄を 1.1 節と 1.2 節で解説しています。

## 注意

1. 本文書では、 $(\infty, 1)$ -圏のモデルとして擬圏 (quasi-category) を採用し、これを  $\infty$ -圏 ( $\infty$ -category) と呼びます。擬圏の定義は理解していると望ましいです (定義自体は用語・記号の項に記載しました)。
2. 本文書の主要な参考文献は [Kerodon] と [Rez22] ですが、両者とも現在更新中です。前者についてはタグ (Tag) と呼ばれる更新で不変な識別子が各項目に振られているため、具体的な箇所を参照する際は対応するリンク付きのタグを記載しています。一方、後者については節番号をそのまま記載しているため、今後の更新で対応する箇所がズレてしまう可能性があることに注意してください。本文書執筆時点での [Rez22] の最新版は 2022 年 11 月 29 日が最終更新日です。

## 前提知識

1. 基礎的な圏論の知識を仮定します。具体的には、スライス圏、関手圏、コンマ圏、米田の補題、(余) 極限、随伴関手に関する基本的な知識を仮定します。
2. また、単体的集合の扱いにある程度慣れていると望ましいです。具体的には、標準  $n$ -単体 (standard  $n$ -simplex)  $\Delta^n$ 、 $\Delta^n$  の  $k$ -番角体 ( $k$ -th horn)  $\Lambda_k^n$ 、 $\Delta^n$  の境界 (boundary)  $\partial\Delta^n$  の定義とイメージを分かっていると読みやすいと思われます (ただし、単体的集合も含め、定義自体は用語・記号の項に記載しました)。これらについては文献 [Alg21] や [Kerodon, Tag 0008, Tag 000K]などを参考にしてください。

## 用語・記号

- Set を集合のなす圏、Cat を小圏のなす圏とする。
- 通常の圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対して、関手圏 (functor category) を  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  と表記する。
- 通常の圏  $\mathcal{C}$  とその対象  $X \in \mathcal{C}$  に対して、スライス圏 (slice category) を  $\mathcal{C}_{/X}$  と、コスライス圏 (coslice category) を  $\mathcal{C}_{X/}$  と表記する。
- 各整数  $n \geq 0$  に対し  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  とおき、整数の全順序によって全順序集合とみなす。このとき、各  $n \geq 0$  に対する全順序集合  $[n]$  とその間の順序を保つ写像のなす圏を  $\Delta$  とかき、単体圏 (simplex category) という。ここで、写像  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  が順序を保つとは、各  $0 \leq i \leq j \leq m$  に対して  $\alpha(i) \leq \alpha(j)$  が成り立つことをいう。

- 関手圏  $\text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set})$  を  $\text{sSet}$  とかき、その対象を単体的集合 (simplicial set) という。各  $n \geq 0$  に対して、集合  $X_n$  の元を  $X$  の  $n$ -単体 ( $n$ -simplex) という。単体的集合  $X \in \text{sSet}$  と単体圏の射  $\alpha: [m] \rightarrow [n]$  に対し、写像  $X(\alpha): X_n \rightarrow X_m$  を単体的作用素 (simplicial operator) と呼び、 $X$  を省いて  $\alpha^*: X_n \rightarrow X_m$  とかく。
- 関手  $N: \text{Cat} \rightarrow \text{sSet}$  を  $N(\mathcal{C})_n := \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], \mathcal{C})$  ( $n \geq 0$ ) により定義し、脈体関手 (nerve functor) という。また、圏  $\mathcal{C}$  に対し単体的集合  $N(\mathcal{C})$  を  $\mathcal{C}$  の脈体 (nerve) という。
- 空でない有限全順序集合  $I$  に対して、 $I$  を圏とみなしたときの脈体  $N(I)$  を  $\Delta^I$  とかく。特に、 $I = [n]$  に対しては  $\Delta^{[n]}$  を単に  $\Delta^n$  とかき、標準  $n$ -単体 (standard  $n$ -simplex) という。
- 各整数  $n \geq 0$  に対し、 $\Delta^n$  の境界 (boundary)  $\partial\Delta^n$  を次のように定義する。

$$\partial\Delta^n := \bigcup_{I \subsetneq [n]} \Delta^I \subseteq \Delta^n.$$

また、各整数  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$  に対し、 $\Delta^n$  の  $k$ -番角体 ( $k$ -th horn)  $\Lambda_k^n$  を次のように定義する。

$$\Lambda_k^n := \bigcup_{k \in I \subsetneq [n]} \Delta^I \subseteq \Delta^n.$$

特に、 $k = 0, n$  の場合の角体を外角体 (outer horn),  $0 < k < n$  の場合の角体を内角体 (inner horn) という。

- 単体的集合  $X$  が  $\infty$ -圏 ( $\infty$ -category) であるとは、任意の整数  $n \geq 1$ ,  $0 < k < n$  と任意の単体的集合の射  $f: \Lambda_k^n \rightarrow X$  に対して、次の三角を可換にするような射  $\tilde{f}: \Delta^n \rightarrow X$  が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

## 謝辞

執筆にあたり、メンバーの方々の活動をはじめとした N/S 高等学校研究部の環境に多くの刺激を受けました。特に、本文書をまとめた形まで仕上げる動機付けになったと感じています。深く感謝いたします。

## 1 準備

この章では、本文書全体を通して用いる概念や結果を説明する。各節の特に重要な部分は次のようになる。なお、本文書でこれらが必要になる理由は、構成した  $\infty$ -圏の関手圏や (コ) スライス圏が実際に再び  $\infty$ -圏になることを示すためである。

- **1.1 節**: 全て (3 項目のみ)。
- **1.2 節**: 弱飽和類の定義 (定義 1.7), 左補類の弱飽和性 (命題 1.9), 小対象論法 (定理 1.10)。
- **1.3 節**: 様々な単体的集合の射のクラスの定義と、クラス間の等式 (要約 1.21)。

**1.1 節**と **1.2 節**は [Rez22, §16, §17] を、**1.3 節**はそれらと [Kerodon, Tag 01B9] を参考にした。

## 1.1 射のリフト

**定義 1.1.**  $f: A \rightarrow B, g: X \rightarrow Y$  を圏  $\mathcal{C}$  の射とする。任意の射  $u: A \rightarrow X, v: B \rightarrow Y$  で以下の図式の外の四角を可換にするものに対して、ある射  $h: B \rightarrow X$  が存在して、図式の上下2つの三角を可換にするとき、 $f$  は  $g$  に対して **LLP** を持つ、また  $g$  は  $f$  に対して **RLP** を持つという\*<sup>1</sup>。これを記号で  $f \sqsupseteq g$  と表す。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & X \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

また、上の可換な四角の図式を  $f$  と  $g$  に対するリフト問題 (lifting problem) という。

**記法 1.2.** 圏  $\mathcal{C}$  の射のなす集まり (クラス)  $S, T$  に対して、任意の  $f \in S, g \in T$  に対し  $f \sqsupseteq g$  が成り立つとき  $S \sqsupseteq T$  と書く。

**定義 1.3.**  $\mathcal{C}$  を圏、 $S$  を  $\mathcal{C}$  の射のクラスとする。

- $\sqsupseteq S := \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid f \sqsupseteq S\}$  とおき、 $S$  の左補類 (left complement) という。
- $S \sqsupseteq := \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid S \sqsupseteq f\}$  とおき、 $S$  の右補類 (right complement) という。

## 1.2 弱飽和類

1. この節では、 $\mathcal{C}$  を任意の小余極限 (small colimit) を持つ圏とする。

**定義 1.4** (レトラクトで閉).  $\mathcal{C}$  の射  $g: X \rightarrow Y$  が射  $f: A \rightarrow B$  のレトラクト (retract) であるとは、次のような  $\mathcal{C}$  における可換図式が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 Y & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & & \text{id}_Y & & \\
 & & \curvearrowleft & & 
 \end{array}$$

$\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  がレトラクトで閉 (closed under retracts) であるとは、各  $f \in S$  に対して、 $f$  の任意のレトラクトも  $S$  に属することをいう。

**定義 1.5** (押し出しで閉).  $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  が押し出しで閉 (closed under pushouts) であるとは、任意の次のような押し出し図式に対して、 $f \in S$  なら  $f' \in S$  であることをいう。

\*<sup>1</sup> LLP は left lifting property, RLP は right lifting property の略である。

$$\begin{array}{ccc}
X & \longrightarrow & X' \\
f \downarrow & & \downarrow f' \\
Y & \longrightarrow & Y'
\end{array}$$

**定義 1.6** (超限合成で閉).  $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  が超限合成で閉 (closed under transfinite compositions) であるとは、任意の整列順序集合  $I$  と、関手  $X : I \rightarrow \mathcal{C}$  であって  $I$  の最小元  $0$  でない任意の  $i \in I$  に対し誘導される射  $\text{colim}_{j < i} X(j) \rightarrow X(i)$  が  $S$  に属するようなものに対し、余極限から得られる射  $X(0) \rightarrow \text{colim}_{i \in I} X(i)$  も  $S$  に属することをいう。

**定義 1.7** (弱飽和類).  $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  が弱飽和類 (weakly saturated class) であるとは、次の条件をみたすことである。

- (1)  $S$  がレトラクトで閉。
- (2)  $S$  が押し出しで閉。
- (3)  $S$  が超限合成で閉。

また、 $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  に対して、 $S$  を含む最小の弱飽和類を  $\overline{S}$  を書き、 $S$  の弱飽和化 (weakly saturation) という。

**注意 1.8.** 任意の弱飽和類は  $\mathcal{C}$  の全ての同型射を含むことと、余直積で閉であることが示せる。

ここで、 $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  が余直積で閉 (closed under coproducts) であるとは、任意の集合  $I$  と任意の  $S$  の射の族  $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  に対して、誘導される射

$$\coprod_{i \in I} f_i : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i$$

も  $S$  に属することをいう。

**証明の概略.** 前半は超限合成の条件において  $I$  を 1 点集合とした場合を考えればよい。

後半は、整列可能定理により集合  $I$  に整列順序を入れると、この整列順序にしたがって順に  $f_i$  たちを押し出しにより  $\coprod_{i \in I} X_i$  に“貼り合わせ”てできた射たちの超限合成として射  $\coprod_{i \in I} f_i$  が書けることからわかる。 □

**命題 1.9.**  $\mathcal{C}$  の射のクラス  $S$  に対して、左補類  ${}^{\square}S$  は弱飽和類である。

**証明.** リフト問題の図式とレトラクト、押し出し、超限合成から得られる図式を組み合わせることで証明できる (いわゆる“図式追跡”(diagram chasing) である)。 □

**2.** 次の定理は 1.3 節で単体的集合の射のクラスを調べる際に非常に重要な役割を果たす。この定理の証明には小対象論法 (small object argument) と呼ばれる命題を用いる\*2。この命題の証明は付録 A 章にて行う。

\*2 本文書においては、命題 1.11 を直接用いることはなく、その系である定理 1.10 しか利用しない。そのため、以降、定理 1.10 のことを小対象論法と呼ぶ。

定理 1.10. 圏  $\mathbf{sSet}$  の射のクラス  $S$  に対して,  $\bar{S} = \square(S^\square)$  が成り立つ。

命題 1.11 (小対象論法). 任意の単体的集合の射  $f: X \rightarrow Y$  は, ある  $(X \xrightarrow{i} Z) \in \bar{S}$  と  $(Z \xrightarrow{p} Y) \in S^\square$  によって  $f = (X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y)$  と分解できる。

定理 1.10 の証明.

1. 左補類は弱飽和類 (命題 1.9) だから,  $S \subseteq \square(S^\square)$  より  $\bar{S} \subseteq \square(S^\square)$  である。以下, 逆向きの包含を示す。
2. 単体的集合の射  $f: X \rightarrow Y$  が  $f \in \bar{S}$  をみたすとき,  $f \in \bar{S}$  であることを示せばよい。
3. 小対象論法 (命題 1.11) より,  $f$  はある  $(X \xrightarrow{i} Z) \in \bar{S}$  と  $(Z \xrightarrow{p} Y) \in S^\square$  によって  $f = (X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y)$  と分解できる。
4. このとき,  $f$  は  $i$  のレトラクト。これは,

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z \\
 \downarrow f & \nearrow \exists s & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y
 \end{array}$$

より

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & & \text{---} & & \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\
 \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{s} & Z & \xrightarrow{p} & Y \\
 & & \text{---} & & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

が可換だからである。

5. よって, 弱飽和類はレトラクトで閉だから  $f \in \bar{S}$  となる。 □

### 1.3 単体的集合の射のクラス

1. 最初に, 次の記法を導入する。

記法 1.12. 4 つの単体的集合の射のクラスを次のように定める。

$$\begin{aligned}
 \text{Cell} &:= \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 1\}, \\
 \text{InnHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 < i < n\}, \\
 \text{LHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 \leq i < n\}, \\
 \text{RHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 < i \leq n\}.
 \end{aligned}$$

2. 単体的集合の単射のなすクラスを  $\text{Mono}$  と書く。次の等式は B.1 節で証明する。

命題 1.13. 等式  $\text{Mono} = \overline{\text{Cell}}$  が成り立つ。

3. 次に、本文書で特に重要な射のクラスを導入する。これは  $\infty$ -圏の“相対版”と思える (命題 1.16 (1) を見よ)。

定義 1.14.  $\text{InnFib} := \text{InnHorn}^{\square}$  とおき、このクラスに属する射を内ファイブレーション (inner fibration) という。

命題 1.15 (合成と引き戻しで閉). 次の (1), (2) が成り立つ。

- (1)  $p: X \rightarrow Y$  と  $q: Y \rightarrow Z$  が内ファイブレーションなら、合成  $q \circ p: X \rightarrow Z$  も内ファイブレーションである。
- (2) 単体的集合の引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ q' \downarrow & & \downarrow q \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

において  $q$  が内ファイブレーションなら、 $q'$  も内ファイブレーションである。

証明. クラス  $\text{InnFib}$  は  $\text{InnHorn}$  の右補類だから、命題 1.9 の双対を考えればよい。 □

命題 1.16. 次の (1)-(3) が成り立つ。

- (1) 単体的集合  $X$  に対して、 $X$  が  $\infty$ -圏であることと、一意的な射  $X \rightarrow \Delta^0$  が内ファイブレーションであることは同値。
- (2)  $q: X \rightarrow Y$  が内ファイブレーションで  $Y$  が  $\infty$ -圏なら、 $X$  も  $\infty$ -圏である。
- (3)  $q: X \rightarrow S$  が内ファイブレーションなら、任意の頂点  $s \in S$  に対して、ファイバー  $X_s = \{s\} \times_S X$  は  $\infty$ -圏である。

証明. (1) :  $\infty$ -圏の定義より明らか。

(2) : (1) と命題 1.15 (1) よりわかる。

(3) : (1) と命題 1.15 (2) よりわかる。 □

定義 1.17. 小対象論法 (定理 1.10) において  $S = \text{InnHorn}$  とすれば、等式  $\overline{\text{InnHorn}} = \square \text{InnFib}$  が成り立つ。このクラスを  $\text{InnAno}$  と書き、 $\text{InnAno}$  に属する射を内緩和射 (inner anodyne) という。

4. 最後に、内ファイブレーションの条件を少し強めた 2 つの射のクラスを導入する。しかし、本文書ではこれらを本質的に用いることはない (定理 3.25 にのみ現れる)。

定義 1.18.  $\text{LFib} := \text{LHorn}^{\square}$  とおき、このクラスに属する射を左ファイブレーション (left fibration) という。また、 $\text{RFib} := \text{RHorn}^{\square}$  とおき、このクラスに属する射を右ファイブレーション (right fibration) という。

**注意 1.19.** 左 (右) ファイブレーションは内ファイブレーションである。すなわち,  $\text{LFib}, \text{RFib} \subseteq \text{InnFib}$  である。

**定義 1.20.** 小対象論法 (定理 1.10) において  $S = \text{LHorn}$  とすれば, 等式  $\overline{\text{LHorn}} = \square \text{LFib}$  が成り立つ。このクラスを  $\text{LAno}$  と書き,  $\text{LAno}$  に属する射を左緩和射 (left anodyne) という。

また, 小対象論法において  $S = \text{RHorn}$  とすれば, 等式  $\overline{\text{RHorn}} = \square \text{RFib}$  が成り立つ。このクラスを  $\text{RAno}$  と書き,  $\text{RAno}$  に属する射を右緩和射 (right anodyne) という。

5. 以上で導入した射のクラスの定義と, 成り立つ等式をまとめておく。

**要約 1.21.**

$$\begin{aligned}
 \text{Cell} &:= \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 1\}, & \text{Mono} &:= \{\text{単射}\} = \overline{\text{Cell}}, \\
 \text{InnHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 < i < n\}, & \text{InnFib} &:= \text{InnHorn}^\square, \\
 \text{LHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 \leq i < n\}, & \text{InnAno} &:= \overline{\text{InnHorn}} = \square \text{InnFib}, \\
 \text{RHorn} &:= \{\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 1, 0 < i \leq n\}, & \text{LFib} &:= \text{LHorn}^\square, \\
 & & \text{LAno} &:= \overline{\text{LHorn}} = \square \text{LFib}, \\
 & & \text{RFib} &:= \text{RHorn}^\square, \\
 & & \text{RAno} &:= \overline{\text{RHorn}} = \square \text{RFib}.
 \end{aligned}$$

## 2 $(\infty, 1)$ -関手圏

この章では,  $\infty$ -圏に対する関手圏の構成を扱う。すなわち,  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対して, 対象が  $\mathcal{C}$  から  $\mathcal{D}$  への関手, 1-射がそのような関手の間の自然変換に対応するような新しい  $\infty$ -圏  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  が存在することを示す。この章の目標は 2 つである。

1 つ目は, 一般の単体的集合  $S, T$  に対し, 新たな単体的集合  $\text{Fun}(S, T)$  を定義することである。これは関数複体と呼ばれ, 関手圏のベースとなる単体的集合である。実際, 通常の 1-圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対して,  $\text{Fun}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D})) \cong N(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$  が成り立つ (命題 2.6)。ここで, 右辺の  $\text{Fun}$  は通常の圏の関手圏を表す。

2 つ目は, 次の定理を示すことである。

**定理 2.1.**  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}$  と単体的集合  $K$  に対して, 関数複体  $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$  は  $\infty$ -圏である。

通常の 1-圏の場合, 関手圏がまた 1-圏をなすことは簡単に確かめられたが,  $\infty$ -圏の場合は比較的複雑な議論が必要である。証明の流れは以下ようになる。

1. 定理の主張を一般化することで, 内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性 (定理 2.13) を示せばよいことがわかる。
2. 内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性は, “随伴の対応” により「内緩和射と単射の押し出し積が内緩和射になる」という主張と等価になる。
3. 内緩和射と単射の生成クラスを考えることで, 2 の主張は単体的集合の組合せ論的な主張 (B.2 節で証明する) に帰着される。

この章の各節の内容は以下の通りである。

- 2.1 節では、単体的集合の関数複体を定義し、脈体に対する関数複体が関手圏の脈体になることと、積と関数複体の随伴の存在を示す。
- 2.2 節では、押し出し積と引き戻し冪を定義し、上の 2 と 3 で述べた議論を説明する。
- 2.3 節では、上の 1 で述べた議論を説明し、定理 2.1 を証明する。

2.1 節は [Kerodon, Tag 005Z] を、2.2 節は [Rez22, §21] を参考にした。

## 2.1 単体的集合の関数複体

1. まず、単体的集合の関数複体を定義する。

定義 2.2.  $S, T$  を単体的集合とする。このとき、単体的集合  $\text{Fun}(S, T)$  を次のように定義する。

- 各  $n \geq 0$  に対して  $\text{Fun}(S, T)_n := \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n \times S, T)$  とする。
- 各  $\Delta$  の射  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  に対して、単体的作用素  $\alpha^* : \text{Fun}(S, T)_n \rightarrow \text{Fun}(S, T)_m$  は、 $n$ -単体  $f : \Delta^n \times S \rightarrow T$  を合成

$$\Delta^m \times S \xrightarrow{\alpha \times \text{id}} \Delta^n \times S \xrightarrow{f} T$$

に移すものとする。

$\text{Fun}(S, T)$  を関数複体 (function complex) という。

命題 2.3. 関数複体の構成  $\text{Fun}(-, -)$  は関手  $\text{Fun} : \text{sSet}^{\text{op}} \times \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  を定める。

証明. 関数複体の定義から簡単に確かめられる。 □

2. 命題 2.3 より、各単体的集合  $S$  に対して関手  $\text{Fun}(S, -) : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  が定まっている。このとき、随伴  $- \times S \dashv \text{Fun}(S, -)$  が成り立つことを示す。そのために、まず特別な単体的集合の射を定義する。

定義 2.4. 単体的集合  $S, T$  に対して、射  $\text{ev} : \text{Fun}(S, T) \times S \rightarrow T$  を次のように定め、評価射 (evaluation map) という。

- 各  $n \geq 0$  に対して、写像  $\text{ev}_n : \text{Fun}(S, T)_n \times S_n \rightarrow T_n$  は、射  $f : \Delta^n \times S \rightarrow T$  と  $\sigma : \Delta^n \rightarrow S$  の組を合成

$$\Delta^n \xrightarrow{\delta} \Delta^n \times \Delta^n \xrightarrow{\text{id} \times \sigma} \Delta^n \times S \xrightarrow{f} T$$

に移す。ここで  $\delta : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$  は対角射  $(\text{id}_{\Delta^n}, \text{id}_{\Delta^n})$  である。

定理 2.5.  $K, S, T$  を単体的集合とする。このとき、合成

$$\theta : \text{Hom}_{\text{sSet}}(K, \text{Fun}(S, T)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(K \times S, \text{Fun}(S, T) \times S) \xrightarrow{\text{ev} \circ -} \text{Hom}_{\text{sSet}}(K \times S, T)$$

は全単射である。さらに、この全単射  $\theta$  は  $K, S, T$  に関してそれぞれ自然である。

証明.  $\theta$  が全単射であることを示し, 自然性は省略する。

1. 射  $f: K \times S \rightarrow T$  から射  $g: K \rightarrow \text{Fun}(S, T)$  を定める。各  $n \geq 0$  と任意の  $\sigma: \Delta^n \rightarrow K$  に対して射  $g_n(\sigma): \Delta^n \times S \rightarrow T$  を, 合成

$$\Delta^n \times S \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} K \times S \xrightarrow{f} T$$

と定める。この構成は  $n$  に関して自然であることがわかるから, 射  $g: K \rightarrow \text{Fun}(S, T)$  が定まる。

2.  $\theta(g) = f$  が成り立つことを示す。各  $n \geq 0$  と任意の  $(\sigma, \tau) \in K_n \times S_n$  に対して,

$$\begin{aligned} \theta(g)_n(\sigma, \tau) &= \text{ev}_n(g_n(\sigma), \tau) \\ &= (\Delta^n \xrightarrow{\delta} \Delta^n \times \Delta^n \xrightarrow{\text{id} \times \tau} \Delta^n \times S \xrightarrow{g_n(\sigma)} T) \\ &= (\Delta^n \xrightarrow{\delta} \Delta^n \times \Delta^n \xrightarrow{\sigma \times \tau} K \times S \xrightarrow{f} T) \\ &= f_n(\sigma, \tau) \end{aligned}$$

となる。したがって  $\theta(g) = f$  である。

3.  $g$  の一意性を示す。もし射  $h: K \rightarrow \text{Fun}(S, T)$  が  $\theta(h) = f$  をみたせば, 2 より  $\theta(h) = \theta(g)$  である。各  $n \geq 0$  と任意の  $\sigma: \Delta^n \rightarrow K$  に対して,  $\text{ev}$  の定義より  $h_n(\sigma) = \theta(h) \circ (\sigma \times \text{id})$  が成り立つから,

$$h_n(\sigma) = \theta(h) \circ (\sigma \times \text{id}) = \theta(g) \circ (\sigma \times \text{id}) = g_n(\sigma)$$

となる。したがって  $h = g$  である。 □

3. 次の命題は, 圏の脈体に対する関数複体が関手圏の脈体になることを主張する。これは関数複体の構成が関手圏の  $\infty$ -圏への拡張とみなせる根拠の 1 つになる。

命題 2.6.  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を圏とする。このとき,  $\text{Fun}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D})) \cong N(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$  が成り立つ。ここで, 右辺の  $\text{Fun}$  は関手圏を表す。

証明. 単体的集合の積と関数複体の随伴 (定理 2.5) と脈体関手が忠実充満であることより, 各  $n \geq 0$  に対して,

$$\begin{aligned} \text{Fun}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D}))_n &\cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, \text{Fun}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D}))) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n \times N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D})) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}([n] \times \mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, N(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))) \\ &\cong N(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))_n. \end{aligned}$$

□

## 2.2 押し出し積と引き戻し冪

1. まず, 押し出し積と引き戻し冪を定義する。

定義 2.7.  $i : A \rightarrow B, j : K \rightarrow L$  を単体的集合の射とする。このとき、射

$$i \square j : (A \times L) \coprod_{A \times K} (B \times K) \rightarrow B \times L$$

を次の可換図式から押し出しの普遍性により一意に得られる射として定め、押し出し積 (pushout-product) という。

$$\begin{array}{ccc}
 A \times K & \xrightarrow{\text{id} \times j} & A \times L \\
 \downarrow i \times \text{id} & & \downarrow \text{id} \times j \\
 B \times K & \longrightarrow & (A \times L) \coprod_{A \times K} (B \times K) \\
 & \searrow \text{id} \times j & \downarrow i \times \text{id} \\
 & & B \times L
 \end{array}$$

定義 2.8.  $i : A \rightarrow B, q : X \rightarrow S$  を単体的集合の射とする。このとき、射

$$q^{\square i} : \text{Fun}(B, X) \rightarrow \text{Fun}(A, X) \times_{\text{Fun}(A, S)} \text{Fun}(B, S)$$

を次の可換図式から引き戻しの普遍性により一意に得られる射として定め、引き戻し冪 (pullback-power) という。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fun}(B, X) & \xrightarrow{q^*} & \text{Fun}(B, S) \\
 \downarrow q^{\square i} & & \downarrow i^* \\
 \text{Fun}(A, X) \times_{\text{Fun}(A, S)} \text{Fun}(B, S) & \longrightarrow & \text{Fun}(B, S) \\
 \downarrow & & \downarrow i^* \\
 \text{Fun}(A, X) & \xrightarrow{q^*} & \text{Fun}(A, S)
 \end{array}$$

記法 2.9. 単体的集合の射のなすクラス  $S, T$  に対して、新たなクラス  $S \square T, T^{\square S}$  を

$$\begin{aligned}
 S \square T &:= \{i \square j \mid i \in S, j \in T\}, \\
 T^{\square S} &:= \{q^{\square i} \mid i \in S, q \in T\}
 \end{aligned}$$

と定める。

2. 押し出し積は射の圏  $\text{sSet}^{[1]}$  上に対称モノイダル構造を定義する。すなわち、次の命題が成り立つ。

命題 2.10. (1) 押し出し積の構成は関手  $-\square- : \text{sSet}^{[1]} \times \text{sSet}^{[1]} \rightarrow \text{sSet}^{[1]}$  を定める。

(2) 任意の対象  $i, j, k \in \text{sSet}^{[1]}$  に対して、 $(i \square j) \square k \cong i \square (j \square k)$  が成り立つ。

(3) 任意の対象  $i, j \in \text{sSet}^{[1]}$  に対して、 $i \square j \cong j \square i$  が成り立つ。

証明. (1) は押し出しの普遍性から確かめられる。(2) は  $\mathbf{sSet}$  において

$$(Y_0 \amalg_X Y_1) \times Z \cong (Y_0 \times Z) \amalg_{X \times Z} (Y_1 \times Z)$$

が成り立つことを用いて、押し出しの普遍性を駆使することでわかる (少し大変である)。(3) は積の対称性から明らか。□

3. 押し出し積のリフト問題と引き戻し冪のリフト問題の間には次の“随伴の対応”がある。これは頻繁に用いられる重要な事実である。

命題 2.11.  $r : K \rightarrow L$ ,  $i : A \rightarrow B$ ,  $q : X \rightarrow S$  を単体的集合の射とする。このとき、次の 2 条件は同値である。

(1)  $(r \square i) \square q$ .

(2)  $r \square (q^{\square i})$ .

$$\begin{array}{ccc} (K \times B) \amalg_{K \times A} (L \times A) & \longrightarrow & X \\ \downarrow r \square i & & \downarrow q \\ L \times B & \longrightarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbf{Fun}(B, X) \\ \downarrow r & & \downarrow q^{\square i} \\ L & \longrightarrow & \mathbf{Fun}(A, X) \times_{\mathbf{Fun}(A, S)} \mathbf{Fun}(B, S) \end{array}$$

証明. 積と関数複体の随伴 (定理 2.5), 引き戻しの普遍性, 押し出しの普遍性を用いればよい。詳細に記述すると図式の量が多くなるため省略する。□

系 2.12. 単体的集合の射のなすクラス  $S, T, U$  に対して、次の 2 条件は同値である。

(1)  $S \square T \square U$ .

(2)  $S \square U^{\square T}$ .

4. 次がこの節の主定理である。この章の目的の定理はこの定理の特別な場合である (2.3 節)。証明に用いる補題 2.14 の証明については B.2 節を見よ。

定理 2.13 (内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性). 包含  $\mathbf{InnAno} \square \mathbf{Mono} \subseteq \mathbf{InnAno}$  が成り立つ。したがって包含  $\mathbf{InnFib}^{\square \mathbf{Mono}} \subseteq \mathbf{InnFib}$  が成り立つ。

補題 2.14. 等式  $\mathbf{InnAno} = \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \mathbf{Mono}}$  が成り立つ。

定理 2.13 の証明. 主張は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& \text{InnAno} \square \text{Mono} \subseteq \text{InnAno} \\
& \Leftrightarrow (\text{InnAno} \square \text{Mono}) \boxtimes \text{InnFib} \\
& \Leftrightarrow \text{InnAno} \boxtimes \text{InnFib}^{\square \text{Mono}} \\
& \Leftrightarrow \text{InnAno} \subseteq \boxtimes (\text{InnFib}^{\square \text{Mono}}) \\
& \Leftrightarrow \{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono} \subseteq \boxtimes (\text{InnFib}^{\square \text{Mono}}) \quad (\because \text{補題 2.14 より}) \\
& \Leftrightarrow (\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono}) \square \text{Mono} \boxtimes \text{InnFib} \\
& \Leftrightarrow \{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square (\text{Mono} \square \text{Mono}) \boxtimes \text{InnFib} \quad (\because \text{命題 2.10 (2) より})
\end{aligned}$$

ここで、 $\text{Mono} \square \text{Mono} \subseteq \text{Mono}$  であることと補題 2.14 より、一番最後の条件が成り立つ。  $\square$

## 2.3 主定理

定理 2.15.  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}$  と単体的集合  $K$  に対して、関数複体  $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$  は  $\infty$ -圏である。

証明.  $\mathcal{C}$  を  $\infty$ -圏,  $K$  を単体的集合とし、一意的な射  $i: \emptyset \hookrightarrow K$ ,  $q: \mathcal{C} \rightarrow \Delta^0$  を考える。

1. 同型  $\text{Fun}(K, \Delta^0) \cong \Delta^0$  と  $\text{Fun}(\emptyset, \mathcal{C}) \cong \Delta^0$  が成り立つから、引き戻し冪

$$q^{\square i}: \text{Fun}(K, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\emptyset, \mathcal{C}) \times_{\text{Fun}(\emptyset, \Delta^0)} \text{Fun}(K, \Delta^0)$$

は一意的な射  $\bar{q}: \text{Fun}(K, \mathcal{C}) \rightarrow \Delta^0$  に同型である。

2. 命題 1.16 (2) より  $\bar{q}$  が内ファイブレーションなら  $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$  は  $\infty$ -圏である。

3. 以上より、引き戻し冪  $q^{\square i}$  が内ファイブレーションなら  $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$  が  $\infty$ -圏であることがいえる。

4. 射  $i: \emptyset \hookrightarrow K$  は単射で、射  $q: \mathcal{C} \rightarrow \Delta^0$  は内ファイブレーションであるから、内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性 (定理 2.13) より  $q^{\square i}$  は内ファイブレーションである。  $\square$

注意 2.16. 主定理の証明に用いた内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性 (定理 2.13) は、他にも  $\infty$ -圏の理論の様々な場面で応用される。その例の 1 つとして、4 章にて定理 2.13 を用いてコンマ圏の  $\infty$ -圏類似が再び  $\infty$ -圏になることを示す。

## 3 $(\infty, 1)$ -スライス圏

この章では、 $\infty$ -圏に対するスライス圏の構成を扱う。通常の圏論では、圏  $\mathcal{C}$  とその対象  $x \in \mathcal{C}$  に対して、スライス圏  $\mathcal{C}_{/x}$  を定めていた。 $\infty$ -圏論では、一般に、 $\infty$ -圏  $\mathcal{C}$ , 単体的集合  $K$ , 射  $p: K \rightarrow \mathcal{C}$  に対してスライス圏  $\mathcal{C}_{/p}$  を定義する。これは、通常の圏論においては、 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^K$  を対角関手としたときのコンマ圏  $\Delta \downarrow p$  にあたる (命題 3.18 を見よ)。この章の目標は 2 つである。

1 つ目は、任意の単体的集合の射  $p: K \rightarrow X$  に対して、スライス単体的集合  $X_{/p}$  とコスライス単体的集合  $X_{p/}$  を定義することである。これは、単体的集合のジョインの構成を用いて行われる。

2 つ目は、次の定理を示すことである。

**定理 3.1.**  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}$  と単体的集合の射  $p: K \rightarrow \mathcal{C}$  に対して、スライス単体的集合  $\mathcal{C}_{/p}$  とコスライス単体的集合  $\mathcal{C}_{p/}$  は  $\infty$ -圏である。

証明の流れは以下のようになる。

1. 主張を一般化することで、内ファイブレーションの引き戻し (コ) スライスの下での安定性 (定理 3.25) を示せばよいことがわかる。
2. 内ファイブレーションの引き戻し (コ) スライスの下での安定性は、“随伴の対応” により「右 (左) 緩和射と単射の押し出しジョインが内緩和射になる」という主張と等価になる。
3. 押し出しジョインと弱飽和化の関係と、右 (左) 緩和射と単射の生成クラスを考えることで、2 の主張は単体的集合の組合せ論的な主張 (B.3 節で証明する) に帰着される。

この章の各節の内容は以下の通りである。

- 3.1 節では、圏のジョインを定義し、それをういて単体的集合のジョインを定義する。その後、脈体のジョインがジョインの脈体になること、ジョインと余極限が交換すること\*3を示す。
- 3.2 節では、単体的集合の (コ) スライスを定義し、ジョインと (コ) スライスの随伴の存在を示す。また、その随伴と 3.1 節で示した 2 つの命題を用いて脈体の (コ) スライスが (コ) スライスの脈体になることを示す。
- 3.3 節では、押し出しジョインと引き戻し冪を定義し、上の 2 と 3 で述べた議論を説明する。
- 3.4 節では、上の 1 で述べた議論を説明し、定理 3.1 を証明する。

3.1 節は [Kerodon, Tag 0160] と [Rez22, §28] を、3.2 節は [Kerodon, Tag 017V] と [Rez22, §29] を、3.3 節は [Rez22, §32] を参考にした。

### 3.1 単体的集合のジョイン

1. 単体的集合のジョインを定義するために、圏のジョインを定義する。

**定義 3.2.**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を圏とする。このとき、圏  $\mathcal{C} \star \mathcal{D}$  を次のように定義し、 $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  のジョイン (join) という。

- 対象全体の集まりを  $\text{Ob}(\mathcal{C} \star \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \amalg \text{Ob}(\mathcal{D})$  とする。
- 射全体の集まりを  $\text{Mor}(\mathcal{C} \star \mathcal{D}) := \text{Mor}(\mathcal{C}) \amalg (\text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})) \amalg \text{Mor}(\mathcal{D})$  とする。
- 対象  $x, y \in \mathcal{C} \star \mathcal{D}$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \star \mathcal{D}}(x, y) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & (x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, y) & (x, y \in \text{Ob}(\mathcal{D})) \\ \{*\} & (x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), y \in \text{Ob}(\mathcal{D})) \\ \emptyset & (x \in \text{Ob}(\mathcal{D}), y \in \text{Ob}(\mathcal{C})) \end{cases}$$

とする。

圏のジョインは明らかに圏をなす。

2. 次の命題はジョインと特別なコマ圏の構成の間の“随伴”を主張する。これは 3.2 節において脈体のス

---

\*3 この表現は不正確である。注意 3.11 を見よ。

ライスがスライスの脈体になること (命題 3.18) を示す際に用いる。また、後でこの“随伴”は単体的集合の場合に一般化される (定理 3.17)。

**命題 3.3.** 圏の間の関手  $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  と圏  $\mathcal{K}$  に対して、同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{K}, \Delta \downarrow F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_{\mathcal{J}}}((\mathcal{J} \xrightarrow{\iota} \mathcal{K} \star \mathcal{J}), (\mathcal{J} \xrightarrow{F} \mathcal{C}))$$

が成り立つ<sup>\*4</sup>。ここで、 $\iota: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K} \star \mathcal{J}$  は包含を表す。さらに、この同型は  $\mathcal{K}, \mathcal{C}$  について自然である。

**証明.** 同型の存在を示し、自然性は省略する。

1. 関手  $H: \mathcal{K} \rightarrow \Delta \downarrow F$  から関手  $\bar{H}: \mathcal{K} \star \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  で  $\bar{H}|_{\mathcal{J}} = F$  をみたくものを次のように定める。

- $\bar{H}|_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  を合成  $\mathcal{K} \xrightarrow{H} \Delta \downarrow F \xrightarrow{P_0} \mathcal{C}$  として定める。ここで、 $P_0: \Delta \downarrow F \rightarrow \mathcal{C}$  は  $P_0((\Delta(c) \Rightarrow F)) = c$  により定まる忘却関手である。
- $\bar{H}|_{\mathcal{J}}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  を  $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  として定める。
- $k \in \mathcal{K}, j \in \mathcal{J}$  に対して、一意な射  $*_{kj} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K} \star \mathcal{J}}(k, j)$  の行き先を、 $H(k) = (\Delta(\bar{H}(k)) \Rightarrow F)$  の  $j$  成分  $H(k)_j: \bar{H}(k) \rightarrow F(j)$  として定める。

$H$  の関手性から、以上の構成は実際に関手を定めることが確かめられる。

2. 関手  $U: \mathcal{K} \star \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  で  $U|_{\mathcal{J}} = F$  をみたくものから関手  $\bar{U}: \mathcal{K} \rightarrow \Delta \downarrow F$  を次のように定める。

- 各  $k \in \mathcal{K}$  に対し、 $\bar{U}(k)$  を次のように定まる自然変換  $\Delta(U(k)) \Rightarrow F$  と定める。
  - 各  $j \in \mathcal{J}$  に対し、 $\bar{U}(k)_j := U(*_{kj}): U(k) \rightarrow F(j)$ 。
- $\mathcal{K}$  の射  $s: k \rightarrow k'$  に対し、 $\bar{U}(s) := \Delta(U(s)): \Delta(U(k)) \Rightarrow \Delta(U(k'))$  と定める。

$U$  の関手性から、以上の構成は well-defined であることが確かめられる。

3. 1 と 2 の構成が主張の全単射を与えることが確かめられる。 □

**3.** 単体的集合のジョインを定義するために、単体圏  $\Delta$  の変種を定義する。

**記法 3.4.** 単体圏  $\Delta$  の対象全体の集合に  $[-1] := \emptyset$  を追加した集合を対象全体の集合とし、それらの間の順序を保つ写像を射全体の集合としてできる圏を  $\Delta_+$  と書く。

**補題 3.5.** 次の 2 つが成り立つ。

- (1) 対象  $[m], [n] \in \Delta_+$  に対して、これらを圏とみなせば  $[m] \star [n] = [m + n + 1]$  が成り立つ。
- (2)  $\Delta_+$  の射  $\alpha: [m] \rightarrow [n_1] \star [n_2]$  に対し、2 つの射  $\alpha_1: [m_1] \rightarrow [n_1], \alpha_2: [m_2] \rightarrow [n_2]$  が一意に存在して、 $\alpha = \alpha_1 \star \alpha_2$  が成り立つ (もし  $\alpha([m]) \subseteq [n_1]$  となるなら  $m_2 = -1$  である)。

**証明.** ともに組合せ論的な考察で簡単に示すことができる。ここでは省略する。 □

**定義 3.6.**  $X, Y$  を単体的集合とする。このとき、単体的集合  $X \star Y$  を次のように定義し、 $X$  と  $Y$  のジョイン (join) という。

<sup>\*4</sup> 以降、(コ) スライス圏における  $\mathrm{Hom}$  を表記する際、対象の射の部分が文脈から明らかであるとき、それを省略する。例えば、この場合  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_{\mathcal{J}}}(\mathcal{K} \star \mathcal{J}, \mathcal{C})$  と表記する。

- 各  $n \geq 0$  に対し

$$(X \star Y)_n := \coprod_{\substack{[n]=[n_1] \star [n_2] \\ [n_1], [n_2] \in \Delta_+}} X_{n_1} \times Y_{n_2}$$

と定める。

- $\Delta$  の射  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  に対し写像  $(X \star Y)(\alpha) : (X \star Y)_n \rightarrow (X \star Y)_m$  を次のように定める。任意の  $(x, y) \in X_{n_1} \times Y_{n_2} \subseteq (X \star Y)_n$  に対し、 $\alpha$  を  $\Delta_+$  の 2 つの射  $\alpha_1 : [m_1] \rightarrow [n_1]$ ,  $\alpha_2 : [m_2] \rightarrow [n_2]$  に  $\alpha = \alpha_1 \star \alpha_2$  と分解する (補題 3.5 (2))。このとき、

$$(X \star Y)(\alpha)((x, y)) := (X\alpha_1(x), Y\alpha_2(y)) \in X_{m_1} \times Y_{m_2} \subseteq (X \star Y)_m$$

とする。

**注意 3.7.** 上の定義の状況において、 $X \star Y$  の  $n$ -単体の集合は次のようにも表示できる。

$$(X \star Y)_n = X_n \amalg \left( \coprod_{\substack{i+j+1=n \\ i, j \geq 0}} X_i \star Y_j \right) \amalg Y_n.$$

**命題 3.8.** 単体的集合のジョインの構成は関手  $-\star- : \mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$  を定める。

**証明.** ジョインの定義から簡単に確かめられる。ここでは省略する。 □

**4.** 圏の脈体のジョインは圏のジョインの脈体になる。これは 3.2 節において脈体のスライスがスライスの脈体になること (命題 3.18) を示す際に用いる。

**命題 3.9.** 圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対し、 $N(\mathcal{C}) \star N(\mathcal{D}) \cong N(\mathcal{C} \star \mathcal{D})$  が成り立つ。

**証明.** 各  $n \geq 0$  に対して、

$$\begin{aligned} & (N(\mathcal{C}) \star N(\mathcal{D}))_n \\ & \cong N(\mathcal{C})_n \amalg \left( \coprod_{i+j+1=n} N(\mathcal{C})_i \times N(\mathcal{D})_j \right) \amalg N(\mathcal{D})_n \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], \mathcal{C}) \amalg \left( \coprod_{i+j+1=n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([i], \mathcal{C}) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([j], \mathcal{D}) \right) \amalg \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], \mathcal{D}) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([n], \mathcal{C} \star \mathcal{D}) \\ & \cong N(\mathcal{C} \star \mathcal{D})_n \end{aligned}$$

となる。ここで、3 つ目の同型は、例えば与えられた関手  $[n] \rightarrow \mathcal{C} \star \mathcal{D}$  が  $[n]$  の対象のどこまでを  $\mathcal{C}$  に移すか考えることで得られる。 □

**5.** 最後に、3.2 節においてジョインとスライスの随伴 (定理 3.17) を示す際に用いる事実を示す。

**命題 3.10.** 任意の単体的集合  $K$  に対し、関手  $K \star -, - \star K : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}_{K/}$  は小余極限を保つ。

証明.  $K \star - : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}_{K/}$  が小余極限を保つことを示す。

1. 関手圏で余極限が各点で計算できることから, 各  $n \geq 0$  に対し関手

$$(K \star -)_n : \text{sSet} \rightarrow \text{Set}_{K_n/}; X \mapsto (K_n \rightarrow (K \star X)_n)$$

が小余極限を保つと示せばよい。

2. 余極限同士が交換することと  $\text{Set}$  において余極限と有限直積が交換することから, 1 の関手は任意の余等化子 (coequalizer) と添字が空でない余直積を保つ。

3. 添字が空の余直積, すなわち始対象の場合  $(K_n \xrightarrow{\text{id}_{K_n}} K_n)$  は  $\text{Set}_{K_n/}$  の始対象だからよい。以上より, 1 の関手は小余極限を保つ。  $\square$

注意 3.11. 関手  $K \star -, - \star K : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  は小余極限を保たない。実際,  $K \star \emptyset \cong \emptyset \star K \cong K$  であるが  $K$  は  $\text{sSet}$  の始対象と限らない。ただし,  $\text{sSet}_{K/}$  値の関手と見た場合には  $(K \xrightarrow{\text{id}_K} K)$  は  $\text{sSet}_{K/}$  の始対象だから問題はない。

## 3.2 単体的集合のスライス

1. まず, 単体的集合の (コ) スライスを定義する。

定義 3.12.  $p : K \rightarrow X$  を単体的集合の射とする。このとき, 単体的集合  $X_{/p}$  を以下のように定義する。

- 各  $n \geq 0$  に対して  $(X_{/p})_n := \{ \bar{p} : \Delta^n \star K \rightarrow X \mid \bar{p}|_K = p \}$  とする。
- $\Delta$  の射  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  に対して, 写像  $(X_{/p})(\alpha) : (X_{/p})_n \rightarrow (X_{/p})_m$  を,  $n$ -単体  $\bar{p} : \Delta^n \star K \rightarrow X$  を合成

$$\Delta^m \star K \xrightarrow{\alpha \star \text{id}_K} \Delta^n \star K \xrightarrow{\bar{p}} X$$

に移すものとする。

また, 単体的集合  $X_{p/}$  を以下のように定義する。

- 各  $n \geq 0$  に対して  $(X_{p/})_n := \{ \bar{p} : K \star \Delta^n \rightarrow X \mid \bar{p}|_K = p \}$  とする。
- $\Delta$  の射  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  に対して, 写像  $(X_{p/})(\alpha) : (X_{p/})_n \rightarrow (X_{p/})_m$  を,  $n$ -単体  $\bar{p} : \Delta^n \star K \rightarrow X$  を合成

$$K \star \Delta^m \xrightarrow{\text{id}_K \star \alpha} K \star \Delta^n \xrightarrow{\bar{p}} X$$

に移すものとする。

$X_{/p}$  を  $p$  上の  $X$  のスライス単体的集合 (slice simplicial set) といい,  $X_{p/}$  を  $p$  上の  $X$  のコスライス単体的集合 (coslice simplicial set) という。

記法 3.13 (頂点上のスライス).  $X$  を単体的集合とし,  $x$  を  $X$  の頂点とする。  $x \in X_0$  から一意に定まる単体的集合の射  $p_x : \Delta^0 \rightarrow X$  に対して, スライス単体的集合  $X_{/p_x}$  を  $X_{/x}$  と, またコスライス単体的集合  $X_{p_x/}$  を  $X_{x/}$  と書く。

**命題 3.14.** スライス構成  $(K \xrightarrow{p} X) \mapsto X/p$  は関手  $\text{sl}_K : \text{sSet}_{K/} \rightarrow \text{sSet}$  を定める。同様に、コスライスの構成は関手  $\text{cosl}_K : \text{sSet}_{K/} \rightarrow \text{sSet}$  を定める。

**証明.** スライスの場合を考える。コスライスの場合も同様である。

簡単のため、スライス圏  $\text{sSet}_{K/}$  の対象  $(p : K \rightarrow X)$  を  $(X, p)$  とかく。  $\text{sSet}_{K/}$  の射  $f : (X, p) \rightarrow (X', p')$  に対して  $\text{sSet}$  の射  $\text{sl}_K(f) : X/p \rightarrow X'/p'$  を次のように定める。

- 各  $n \geq 0$  に対して、  $\text{sl}_K(f)_n : (X/p)_n \rightarrow (X'/p')_n$  は  $n$ -単体  $\bar{p} : \Delta^n \star K \rightarrow X$  を合成

$$\Delta^n \star K \xrightarrow{\bar{p}} X \xrightarrow{f} X'$$

に移すものとする。  $p' = f \circ p$  だからこれは well-defined である。

このとき、  $\text{sl}_K$  は明らかに関手の条件をみたす。 □

**注意 3.15.** 上の命題では、単体的集合  $K$  と  $\text{sSet}_{K/}$  の射  $f : (X, p) \rightarrow (X', p')$  に対して、  $f$  との後合成  $f \circ -$  により単体的集合の射  $\text{sl}_K(f) : X/p \rightarrow X'/p' = X'/(f \circ p)$  を定めた。他方、前合成によってもスライスの間の射を定めることができる。すなわち、単体的集合の射  $T \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} X$  に対して、単体的集合の射  $j^* : X/p \rightarrow X/(p \circ j)$  が次のように定まる。

- 各  $n \geq 0$  に対して、  $(j^*)_n : (X/p)_n \rightarrow (X/(p \circ j))_n$  は  $n$ -単体  $\bar{p} : \Delta^n \star K \rightarrow X$  を合成

$$\Delta^n \star T \xrightarrow{\text{id} \star j} \Delta^n \star K \xrightarrow{\bar{p}} X$$

に移すものとする。

記号  $\text{sl}_K(f) : X/p \rightarrow X'/(f \circ p)$  を  $f^*$  と書くことにすると、左下の可換図式に対して、右下の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p} & X \\ \uparrow j & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{f \circ p \circ j} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X/p & \xrightarrow{f^*} & X'/(f \circ p) \\ \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ X/(p \circ j) & \xrightarrow{f_*} & X'/(f \circ p \circ j) \end{array}$$

以上の事実はコスライスに対しても成り立ち、3.3 節で用いられる。

**2.** 命題 3.14 で、単体的集合  $K$  に対し関手  $\text{sl}_K : \text{sSet}_{K/} \rightarrow \text{sSet}$  を定義した。このとき、ジョインとスライスの間の随伴  $- \star K \dashv \text{sl}_K : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}_{K/}$  が成り立つことを示す。そのために、まず特別な単体的集合の射を定める。

**定義 3.16.**  $p : K \rightarrow X$  を単体的集合の射とする。このとき、単体的集合の射  $c : X/p \star K \rightarrow X$  を次のように定義し、スライス収縮射 (slice contraction morphism) という。

- 制限  $c|_{X/p} : X/p \rightarrow X$  は射影  $X/p \rightarrow X$  である。
- 制限  $c|_K : K \rightarrow X$  は  $p$  である。

- $\sigma : \Delta^n \rightarrow X/p \star K$  を  $X/p$  にも  $K$  にも含まれない  $n$ -単体とする。すると、 $\sigma$  は

$$\Delta^n \simeq \Delta^r \star \Delta^s \xrightarrow{\sigma_- \star \sigma_+} X/p \star K$$

と一意に分解する。ここで、 $r + s + 1 = n$  である。スライス  $X/p$  の定義より  $\sigma_-$  は単体的集合の射  $\bar{p} : \Delta^r \star K \rightarrow X$  で  $\bar{p}|_K = p$  をみたすものと同一視できる。このとき、 $c(\sigma) : \Delta^n \rightarrow X$  を合成

$$\Delta^n \simeq \Delta^r \star \Delta^s \xrightarrow{\text{id} \star \sigma_+} \Delta^p \star K \xrightarrow{\bar{p}} X$$

として定める。

同様にしてコスライス収縮射 (coslice contraction morphism)  $c' : K \star X/p \rightarrow X$  を定義する。

**定理 3.17** (ジョインとスライスの随伴).  $p : K \rightarrow X$  を単体的集合の射とし、 $c : X/p \star K \rightarrow X$  をスライス収縮射とする。このとき、任意の単体的集合  $Y$  に対して、 $c$  との後合成  $c \circ -$  は全単射

$$\theta_Y : \text{Hom}_{\text{sSet}}(Y, X/p) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}_{K/}}(Y \star K, X)$$

を誘導する。同様に、コスライス収縮射  $c' : K \star X/p \rightarrow X$  との後合成  $c' \circ -$  は全単射

$$\theta'_Y : \text{Hom}_{\text{sSet}}(Y, X/p) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}_{K/}}(K \star Y, X)$$

を誘導する。

**証明.** 以下、スライスについての主張を示す。

1. 写像  $\theta_Y$  は、単体的集合の射  $h : Y \rightarrow X/p$  を合成

$$Y \star K \xrightarrow{h \star \text{id}_K} X/p \star K \xrightarrow{c} X$$

に移すことで定義される。

2.  $Y \in \text{sSet}$  に対してこの写像  $\theta_Y \in \text{Fun}([1], \text{Set})$  を対応させる操作は、関手  $\Phi : \text{sSet}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}([1], \text{Set})$  を定める。

3. ここで、この関手  $\Phi$  が余極限を極限に移すと仮定する。すると、任意の単体的集合  $Y$  は  $Y \cong \text{colim}_{\Delta^n \rightarrow Y} \Delta^n$  と余極限で表せるから、射の圏  $\text{Fun}([1], \text{Set})$  において同型  $\Phi(Y) \cong \lim_{\Delta^n \rightarrow Y} \Phi(\Delta^n)$  が成り立つ。スライスの定義より  $\Phi(\Delta^n) = \theta_{\Delta^n}$  は全単射であるから、 $\Phi(Y) = \theta_Y$  も全単射である。

4. 以上より、関手  $\Phi$  が余極限を極限に移すことを示せばよい。 $T : J \rightarrow \text{sSet}$  を関手とし、 $\text{Fun}([1], \text{Set})$  において同型

$$\Phi(\text{colim}_{j \in J} T(j)) \cong \lim_{j \in J^{\text{op}}} \Phi(T(j))$$

が成り立つことを示す。

5. 関手  $- \star K : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}_{K/}$  は任意の小余極限を保つ (命題 3.10) から、標準的な同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{sSet}_{K/}}((\text{colim}_{j \in J} T(j)) \star K, X) &\cong \text{Hom}_{\text{sSet}_{K/}}(\text{colim}_{j \in J} (T(j) \star K), X) \\ &\cong \lim_{j \in J^{\text{op}}} \text{Hom}_{\text{sSet}_{K/}}(T(j) \star K, X) \end{aligned}$$

がある。この同型と、同型

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{colim}_{j \in J} T(j), X/p) \cong \lim_{j \in J^{\text{op}}} \text{Hom}_{\text{sSet}}(T(j), X/p)$$

を合わせれば、4 の同型が成り立つことがわかる。 □

3. 次の命題は、圏の脈体のスライスが圏のスライス（一般には特別なコンマ圏）の脈体になることを主張する。これは単体的集合の（コ）スライスの構成が（コ）スライス圏の  $\infty$ -圏への拡張とみなせる根拠の 1 つになる。

命題 3.18.  $\mathcal{J}, \mathcal{C}$  を圏,  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  を関手とする。このとき,  $N(\mathcal{C})_{/F} \cong N(\Delta \downarrow F)$  が成り立つ。ここで,  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$  は対角関手 (diagonal functor) であり,  $F$  は関手  $[0] \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$  とみなしている。

特に, 圏  $\mathcal{C}$  と対象  $x \in \mathcal{C}$  に対して,  $N(\mathcal{C})_{/x} \cong N(\mathcal{C}_{/x})$  が成り立つ。また, 以上の主張はコスライスでも成り立つ。

証明. 脈体同士のジョインがジョインの脈体になること (命題 3.9), 脈体の忠実充満性, 圏のジョインとコンマ圏の間の随伴 (命題 3.3) より, 各  $n \geq 0$  に対して,

$$\begin{aligned} (N(\mathcal{C})_{/F})_n &\cong \text{Hom}_{\text{Set}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})_{/F}) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Set}_{N(\mathcal{J})}}(\Delta^n \star N(\mathcal{J}), N(\mathcal{C})) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Set}_{N(\mathcal{J})}}(N([n] \star \mathcal{J}), N(\mathcal{C})) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}_{\mathcal{J}}}( [n] \star \mathcal{J}, \mathcal{C} ) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}([n], \Delta \downarrow F) \\ &\cong N(\Delta \downarrow F)_n. \end{aligned}$$

□

### 3.3 押し出しジョインと引き戻しスライス

1. まず, 押し出しジョインと引き戻しスライスを定義する。

定義 3.19.  $i : A \rightarrow B, j : T \rightarrow K$  を単体的集合の射とする。このとき, 射

$$i \boxtimes j : (A \star K) \coprod_{A \star T} (B \star T) \rightarrow B \star K$$

を次の可換図式から押し出しの普遍性により一意に得られる射として定め, 押し出しジョイン (pushout-join) という。

$$\begin{array}{ccc} A \star T & \xrightarrow{\text{id} \star j} & A \star K \\ \downarrow i \star \text{id} & & \downarrow \\ B \star T & \longrightarrow & (A \star K) \coprod_{A \star T} (B \star T) \\ & \searrow i \boxtimes j & \downarrow i \star \text{id} \\ & & B \star K \end{array}$$

(The diagram shows a pushout square with an additional arrow from the bottom-left to the bottom-right, and a curved arrow from the top-right to the bottom-right.)

定義 3.20. 単体的集合の射  $T \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} X \xrightarrow{q} S$  に対して, 射

$$q \boxtimes p j : X_{/p} \rightarrow X_{/(p \circ j)} \times_{S_{/(q \circ p \circ j)}} S_{/(q \circ p)}$$

を次の可換図式から引き戻しの普遍性により一意的に得られる射として定め、引き戻しスライス (pullback-slice) という。

$$\begin{array}{ccc}
 X/p & \xrightarrow{q_*} & S/(q \circ p) \\
 \downarrow j^* & \dashrightarrow^{q^{\boxtimes p j}} & \downarrow j^* \\
 X/(p \circ j) \times_{S/(q \circ p \circ j)} S/(q \circ p) & \longrightarrow & S/(q \circ p) \\
 \downarrow & & \downarrow j^* \\
 X/(p \circ j) & \xrightarrow{q_*} & S/(q \circ p \circ j)
 \end{array}$$

また、射

$$q^{j \boxtimes p} : X_p/ \rightarrow X_{(p \circ j)/} \times_{S_{(q \circ p \circ j)/}} S_{(q \circ p)/}$$

を次の可換図式から引き戻しの普遍性により一意的に得られる射として定め、引き戻しコスライス (pullback-coslice) という。

$$\begin{array}{ccc}
 X_p/ & \xrightarrow{q_*} & S_{(q \circ p)/} \\
 \downarrow j^* & \dashrightarrow^{q^{j \boxtimes p}} & \downarrow j^* \\
 X_{(p \circ j)/} \times_{S_{(q \circ p \circ j)/}} S_{(q \circ p)/} & \longrightarrow & S_{(q \circ p)/} \\
 \downarrow & & \downarrow j^* \\
 X_{(p \circ j)/} & \xrightarrow{q_*} & S_{(q \circ p \circ j)/}
 \end{array}$$

**記法 3.21.** 単体的集合の射のなすクラス  $S, T$  に対して、新たなクラス  $S \boxtimes T, T^{\boxtimes S}, T^{S \boxtimes}$  を

$$\begin{aligned}
 S \boxtimes T &:= \{i \boxtimes j \mid i \in S, j \in T\}, \\
 T^{\boxtimes S} &:= \{q^{\boxtimes p j} \mid j \in S, p \in \text{Mor}(\text{sSet}), q \in T \text{ で } \text{cod}(j) = \text{dom}(p), \text{cod}(p) = \text{dom}(q)\}, \\
 T^{S \boxtimes} &:= \{q^{i \boxtimes p} \mid j \in S, p \in \text{Mor}(\text{sSet}), q \in T \text{ で } \text{cod}(j) = \text{dom}(p), \text{cod}(p) = \text{dom}(q)\}
 \end{aligned}$$

と定める。

**2.** 押し出しジョインのリフト問題と引き戻しスライスのリフト問題の間には次の“随伴の対応”がある。これは頻繁に用いられる重要な事実である。

**命題 3.22.**  $i : A \rightarrow B, j : T \rightarrow K, q : X \rightarrow S$  を単体的集合の射とする。このとき、次の2条件は同値である。

- (1)  $(i \boxtimes j) \boxtimes q$ .
- (2) 任意の単体的集合の射  $p : K \rightarrow X$  に対して  $i \boxtimes (q^{\boxtimes p j})$ .

$$\begin{array}{ccc}
(A \star K) \amalg_{A \star T} (B \star T) & \longrightarrow & X \\
\downarrow i \boxtimes j & & \downarrow q \\
B \star K & \longrightarrow & S
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & X/p \\
\downarrow i & & \downarrow q^{\boxtimes p j} \\
B & \longrightarrow & X_{/(p \circ j)} \times_{S_{/(q \circ p \circ j)}} S_{/(q \circ p)}
\end{array}$$

また、次の 2 条件は同値である。

- (1)  $(j \boxtimes i) \boxtimes q$ .
- (2) 任意の単体的集合の射  $p: K \rightarrow X$  に対して  $i \boxtimes (q^j \boxtimes p)$ .

$$\begin{array}{ccc}
(K \star A) \amalg_{T \star A} (T \star B) & \longrightarrow & X \\
\downarrow j \boxtimes i & & \downarrow q \\
K \star B & \longrightarrow & S
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & X/p \\
\downarrow i & & \downarrow q^j \boxtimes p \\
B & \longrightarrow & X_{(p \circ j)/} \times_{S_{(q \circ p \circ j)/}} S_{(q \circ p)/}
\end{array}$$

証明. ジョインとスライスの随伴 (命題 3.17), 引き戻しの普遍性, 押し出しの普遍性を用いればよい。詳細に記述すると図式の量が多くなるため省略する。  $\square$

系 3.23. 単体的集合の射のなす  $S, T, U$  に対して、次の 3 条件は同値。

- (1)  $S \boxtimes T \boxtimes U$ .
- (2)  $S \boxtimes U^{\boxtimes T}$ .
- (3)  $T \boxtimes U^{S \boxtimes}$ .

3. 射のクラスの弱飽和化と押し出しジョインの間には次の関係がある。これはこの節の主定理を示す際に用いられる。

命題 3.24. 単体的集合の射のなすクラス  $S, T$  に対して、包含  $\overline{S \boxtimes T} \subseteq \overline{S \boxtimes T}$  が成り立つ。

証明.

1. 小対象論法 (定理 1.10) より  $\overline{S \boxtimes T} = \boxtimes((S \boxtimes T) \boxtimes)$  となる。  $U := (S \boxtimes T) \boxtimes$  とおけば  $\overline{S \boxtimes T} = \boxtimes U$  である。
2. よって  $\overline{S \boxtimes T} \subseteq \boxtimes U$  を示せばよい。左補類の弱飽和性 (命題 1.9), 押し出しジョインと引き戻しスライスの随伴の対応 (系 3.23) より、この条件は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\overline{S \boxtimes T} \subseteq \boxtimes U &\iff (\overline{S \boxtimes T}) \boxtimes U \iff \overline{S} \boxtimes U^{\boxtimes T} \iff \overline{S} \subseteq \boxtimes (U^{\boxtimes T}) \iff S \subseteq \boxtimes (U^{\boxtimes T}) \\
&\iff (S \boxtimes \overline{T}) \boxtimes U \iff \overline{T} \boxtimes U^{S \boxtimes} \iff \overline{T} \subseteq \boxtimes (U^{S \boxtimes}) \iff T \subseteq \boxtimes (U^{S \boxtimes}) \\
&\iff (S \boxtimes T) \boxtimes U.
\end{aligned}$$

3.  $U$  の定義より最後の条件が成り立つ。  $\square$

4. 次がこの節の主定理である。この章の目的の定理はこの定理の特別な場合である (3.4 節)。証明に用いる補題 3.26 の証明については B.3 節を見よ。

**定理 3.25** (内ファイブレーションの引き戻し (コ) スライスの下での安定性). 次の 2 つが成り立つ。

- (1) 包含  $\text{RAno} \boxtimes \text{Mono} \subseteq \text{InnAno}$  が成り立つ。したがって、包含  $\text{InnFib}^{\boxtimes \text{Mono}} \subseteq \text{RFib}$  が成り立つ。
- (2) 包含  $\text{Mono} \boxtimes \text{LAno} \subseteq \text{InnAno}$  が成り立つ。したがって、包含  $\text{InnFib}^{\text{Mono} \boxtimes} \subseteq \text{LFib}$  が成り立つ。

**補題 3.26.** 次の 2 つの同型が成り立つ。

- (1) 各  $0 \leq i \leq n, k \geq 0$  に対して  $(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n) \boxtimes (\partial \Delta^k \hookrightarrow \Delta^k) \cong (\Lambda_i^{n+1+k} \hookrightarrow \Delta^{n+1+k})$ .
- (2) 各  $0 \leq i \leq n, k \geq 0$  に対して  $(\partial \Delta^k \hookrightarrow \Delta^k) \boxtimes (\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n) \cong (\Lambda_{k+1+i}^{k+1+n} \hookrightarrow \Delta^{k+1+n})$ .

**定理 3.25** の証明.

- (1) 1. 命題 3.24 より、 $\overline{\text{RHorn} \boxtimes \text{Cell}} \subseteq \text{InnAno}$  ならよい。
2. これは、補題 3.26 より  $\text{RHorn} \boxtimes \text{Cell} \subseteq \text{InnHorn}$  だから成り立つ。
- (2) 1. 命題 3.24 より、 $\overline{\text{Cell} \boxtimes \text{Mono}} \subseteq \text{InnAno}$  ならよい。
2. これは、補題 3.26 より  $\text{Cell} \boxtimes \text{LHorn} \subseteq \text{InnHorn}$  だから成り立つ。 □

### 3.4 主定理

**定理 3.27.**  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}$  と単体的集合の射  $p: K \rightarrow \mathcal{C}$  に対して、スライス単体的集合  $\mathcal{C}_{/p}$  とコスライス単体的集合  $\mathcal{C}_{p/}$  は  $\infty$ -圏である。

**証明.** 一意的な射  $j: \emptyset \hookrightarrow K, q: \mathcal{C} \rightarrow \Delta^0$  を考える。以下、スライスの場合を示すが、コスライスも全く同様にできる。

1. 同型  $\mathcal{C}_{/(p \circ j)} \cong \mathcal{C}, \Delta_{/(q \circ p)}^0 \cong \Delta^0$  が成り立つから、引き戻しスライス

$$q^{\boxtimes p j}: \mathcal{C}_{/p} \rightarrow \mathcal{C}_{/(p \circ j)} \times_{\Delta_{/(q \circ p \circ j)}^0} \Delta_{/(q \circ p)}^0$$

は忘却  $j^*: \mathcal{C}_{/p} \rightarrow \mathcal{C}$  と同型である。

2. 命題 1.16 (2) より、 $j^*$  が内ファイブレーションなら  $\mathcal{C}_{/p}$  は  $\infty$ -圏である。
3. 以上より、引き戻しスライス  $q^{\boxtimes p j}$  が内ファイブレーションなら  $\mathcal{C}_{/p}$  が  $\infty$ -圏であることがいえる。
4. 射  $j: \emptyset \hookrightarrow K$  は単射で、射  $q: \mathcal{C} \rightarrow \Delta^0$  は内ファイブレーションであるから、定理 3.25 (1) より  $q^{\boxtimes p j}$  は内ファイブレーションである。 □

**注意 3.28.** 主定理の証明に用いた内ファイブレーションの引き戻し (コ) スライスの下での安定性 (定理 3.25) は、他にも  $\infty$ -圏の理論の様々な場面で応用される。

本文書ではその例は扱わないが、重要なものとして **Joyal の拡張定理** (Joyal extension theorem) がある ([Rez22, 34.2], [Kerodon, Tag 019F])。これは  $\infty$ -圏における同型射のある特定の外角体の拡張の存在によって特徴づける定理である。これを用いることで、例えば Kan 複体と  $\infty$ -亜群 (全ての射が同型射である  $\infty$ -圏) が同一の概念であることが示せる。上の主定理の証明には  $\text{InnFib}^{\boxtimes \text{Mono}}$  の元が内ファイブレーションになることしか用いていないが、Joyal の拡張定理の証明には右ファイブレーションにもなる事実を本質的に用いる。詳細は [Rez22, §34], [Kerodon, Tag 019C], [Rem22]などを参照せよ。

## 4 $(\infty, 1)$ -コンマ圏

この章では、 $\infty$ -圏に対するコンマ圏の構成を扱う。この章の目標は2つである。

1つ目は、一般の単体的集合の射  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  と  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  に対し、コンマ単体的集合  $F \downarrow G$  を定義することである (定義 4.1)。これは通常圏の関手に対するコンマ圏の類似である (注意 4.2)。

2つ目は、上の状況で  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  が全て  $\infty$ -圏のとき、コンマ単体的集合  $F \downarrow G$  も  $\infty$ -圏だと示すことである (定理 4.3)。注意 2.16 でも述べたように、ここで 2.2 節で示した内ファイブレーションの引き戻し冪の下での安定性が利用できる。つまり、本章の結果はこの一般的な主張の用途が関手圏のみではないことを示す1つの例になる。

この章は [Kerodon, Tag 01KE] を参考にした。

**定義 4.1.** 単体的集合の射  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  と  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  に対して、コンマ単体的集合 (comma simplicial set)<sup>\*5</sup>  $F \downarrow G$  を次の引き戻しで定義する。

$$\begin{array}{ccc} F \downarrow G & \dashrightarrow & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \iota^* \\ \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{F \times G} & \text{Fun}(\partial\Delta^1, \mathcal{E}) \end{array}$$

ここで、 $\iota: \partial\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^1$  は包含である。

**注意 4.2.** 通常圏の間の関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  と  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  に対して、コンマ圏  $F \downarrow G$  は上の定義の類似の引き戻しとして表せる。すなわち、次の引き戻し図式がある。

$$\begin{array}{ccc} F \downarrow G & \longrightarrow & \text{Fun}([1], \mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \iota^* \\ \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{F \times G} & \text{Fun}([0] \amalg [0], \mathcal{E}) \end{array}$$

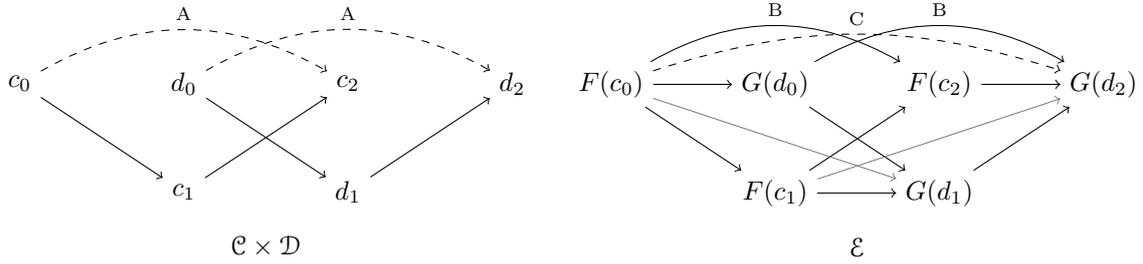
ここで、 $\iota: [0] \amalg [0] \rightarrow [1]$  は、0 を 0 に送る関手  $[0] \rightarrow [1]$  と 0 を 1 に送る関手  $[0] \rightarrow [1]$  から余直積の普遍性により一意に定まる関手である。

また、以上の事実と脈体関手が極限と交換すること、脈体関手が  $\text{Fun}$  と交換すること (命題 2.6) より、脈体のコンマ構成がコンマ圏の脈体になることがわかる。

**定理 4.3.**  $\infty$ -圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  と単体的集合の射  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  に対して、コンマ単体的集合  $F \downarrow G$  は  $\infty$ -圏である。

考察. 射  $F \downarrow G \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  を使い先に  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  で合成 (リフト) を行い (下の図の A), 得られた単体を  $F \times G: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Fun}(\partial\Delta^1, \mathcal{E})$  で送り (下の図の B), 最後に  $\mathcal{E}$  側でリフトを行えばよい (下の図の C)。

<sup>\*5</sup> [Kerodon] では **oriented fiber product** と呼ばれている。



( $\Lambda_1^2$  の場合の図。中身も含めた右の図形が求める拡張で、上面の四角がコンマ圏での射の合成にあたる。)

証明.  $\mu_0 : F \downarrow G \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  と  $\mu_1 : F \downarrow G \rightarrow \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E})$  を引き戻しから定まる射とする。

1. 任意の  $n \geq 1$ ,  $0 < k < n$  と任意の射  $\sigma : \Lambda_k^n \rightarrow F \downarrow G$  に対して、次の三角を可換にする射  $\tilde{\sigma} : \Delta^n \rightarrow F \downarrow G$  が存在すればよい。

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \xrightarrow{\sigma} & F \downarrow G \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\sigma} & \\
 \Delta^n & & 
 \end{array}$$

2.  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  は  $\infty$ -圏だから、次の三角を可換にする射  $\tilde{\sigma}_0 : \Delta^n \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \xrightarrow{\sigma} F \downarrow G & \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{C} \times \mathcal{D} \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\sigma}_0 & \\
 \Delta^n & & 
 \end{array}$$

3. 上の三角の可換性とコンマ単体的集合の定義の図式より、次の四角の外側が可換。

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda_k^n & \xrightarrow{\sigma} & F \downarrow G & \xrightarrow{\mu_1} & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E}) \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{\sigma}_1 & & & \downarrow \iota^* \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_0} & \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{F \times G} & \text{Fun}(\partial\Delta^1, \mathcal{E})
 \end{array}$$

$\mathcal{E}$  は  $\infty$ -圏で  $\iota : \partial\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^1$  は単射だから、内ファイブレーションの引き戻し幕の下での安定性 (定理 2.13) より、 $\iota^*$  は内ファイブレーションである。したがって、上の四角のリフト  $\tilde{\sigma}_1 : \Delta^n \rightarrow \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E})$  が存在する。

4. 上の図式の下三角の可換性より、引き戻しの普遍性から射  $\tilde{\sigma} : \Delta^n \rightarrow F \downarrow G$  が一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E}) \\
\downarrow \tilde{\sigma} & \searrow \mu_1 & \downarrow \iota^* \\
F \downarrow G & \xrightarrow{\mu_1} & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{E}) \\
\downarrow \mu_0 & & \downarrow \iota^* \\
\mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{F \times G} & \text{Fun}(\partial\Delta^1, \mathcal{E})
\end{array}$$

5. 2 の三角の図式と 3 の図式の上の三角の可換性より、 $\tilde{\sigma}$  が求めるリフトであることがわかる。  $\square$

## 付録 A 小対象論法

1. この章では小対象論法 (命題 1.11) を証明する。ここでは順序数 (ordinal) や超限帰納法 (transfinite induction) に関する基本的な知識を仮定する (例えば Wikipedia の [順序数](#) や [超限帰納法](#) のページを参照せよ)。この章は [Rez22, §18] を参考にした。

証明.

1. 集合  $[S, f] := \{(s, u, v) \mid (A \xrightarrow{s} B) \in S, (A \xrightarrow{u} X), (B \xrightarrow{v} Y), f \circ u = v \circ s\}$  を考える。すなわち、 $[S, f]$  は各  $s \in S$  に対し  $s$  と  $f$  に対するリフト問題を全て集めた集合である。

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & X \\
s \downarrow & & \downarrow f \\
B & \xrightarrow{v} & Y
\end{array}$$

2. このとき、射  $X \xrightarrow{Lf} Ef$  を次の押し出しで定める。

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{(s,u,v) \in [S,f]} A & \xrightarrow{\tilde{u}} & X \\
\coprod s \downarrow & & \downarrow Lf \\
\coprod_{(s,u,v) \in [S,f]} B & \longrightarrow & Ef
\end{array}$$

ここで、 $\tilde{u}$  は  $A \xrightarrow{u} X$  たちから余直積の普遍性により得られる射を表す。

3. 次の図式の外側は  $[S, f]$  の定義より可換だから、次の図式を可換にする射  $Ef \xrightarrow{Rf} Y$  が一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{(s,u,v) \in [S,f]} A & \xrightarrow{\tilde{u}} & X \\
\coprod s \downarrow & & \downarrow Lf \\
\coprod_{(s,u,v) \in [S,f]} B & \longrightarrow & Ef \\
& & \downarrow Rf \\
& & Y
\end{array}$$

$\tilde{v}$

4. 以上で分解  $f = (X \xrightarrow{L^1 f} E^1 f \xrightarrow{R^1 f} Y)$  で  $L^1 f \in \overline{S}$  なるものが得られたが,  $R^1 f \in S^\square$  とは限らない。そこで, 超限帰納的にこの構成を繰り返す。すなわち, 任意の 1 以上の順序数  $\alpha$  に対して分解  $f = (X \xrightarrow{L^\alpha f} E^\alpha f \xrightarrow{R^\alpha f} Y)$  で  $L^\alpha f \in \overline{S}$  なるものを次のように定める。

- $\alpha = 1$  のとき, 上の分解  $f = (X \xrightarrow{L^1 f} E^1 f \xrightarrow{R^1 f} Y)$  として定める。
- 順序数  $\beta$  に対して定まっているとき, 射  $X \xrightarrow{L^{\beta+1} f} E^{\beta+1} f$  を  $L^\beta f$  と次の押し出しで定まる射  $L(R^\beta f)$  との合成  $L^{\beta+1} f := (X \xrightarrow{L^\beta f} E^\beta f \xrightarrow{L(R^\beta f)} E^{\beta+1} f)$  として定める。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(s^\beta, u^\beta, v^\beta) \in [S, R^\beta f]} A^\beta & \xrightarrow{\widetilde{u}^\beta} & E^\beta f \\ \coprod s^\beta \downarrow & & \downarrow L(R^\beta f) \\ \coprod_{(s^\beta, u^\beta, v^\beta) \in [S, R^\beta f]} B^\beta & \longrightarrow & E^{\beta+1} f \end{array}$$

また, 射  $E^{\beta+1} \xrightarrow{R^{\beta+1} f} Y$  を押し出しの普遍性から一意に得られる射として定める (上の 3 参照)。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(s^\beta, u^\beta, v^\beta) \in [S, R^\beta f]} A^\beta & \xrightarrow{\widetilde{u}^\beta} & E^\beta f \\ \coprod s^\beta \downarrow & & \downarrow L(R^\beta f) \\ \coprod_{(s^\beta, u^\beta, v^\beta) \in [S, R^\beta f]} B^\beta & \longrightarrow & E^{\beta+1} f \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{R^\beta f} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{R^{\beta+1} f} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{\widetilde{v}^\beta} \end{array} \begin{array}{l} E^\beta f \\ E^{\beta+1} f \\ Y \end{array}$$

このとき,  $f = (X \xrightarrow{L^{\beta+1} f} E^{\beta+1} f \xrightarrow{R^{\beta+1} f} Y)$  かつ  $L^{\beta+1} f \in \overline{S}$  である。

- $\gamma$  を極限順序数とし, 任意の  $\beta < \gamma$  に対して分解が定まっているとする。このとき, sSet における  $\gamma$  で添字付けられた図式

$$X \xrightarrow{L^1 f} E^1 f \xrightarrow{L(R^1 f)} E^2 f \xrightarrow{L(R^2 f)} \dots \rightarrow E^\beta f \xrightarrow{L(R^\beta f)} E^{\beta+1} f \rightarrow \dots$$

の余極限を  $E^\gamma f$  とし, 射  $X \xrightarrow{L^\gamma f} E^\gamma f$  を余極限の構成から定まる射 (すなわち上の図式の超限合成) とする。また, 射  $E^\gamma f \xrightarrow{R^\gamma f} Y$  を各  $\beta < \gamma$  に対する射  $E^\beta f \xrightarrow{R^\beta f} Y$  から余極限の普遍性により一意的に定まる射として定める。このとき  $f = (X \xrightarrow{L^\gamma f} E^\gamma f \xrightarrow{R^\gamma f} Y)$  であり,  $\overline{S}$  は超限合成で閉だから  $L^\gamma f \in \overline{S}$  である。

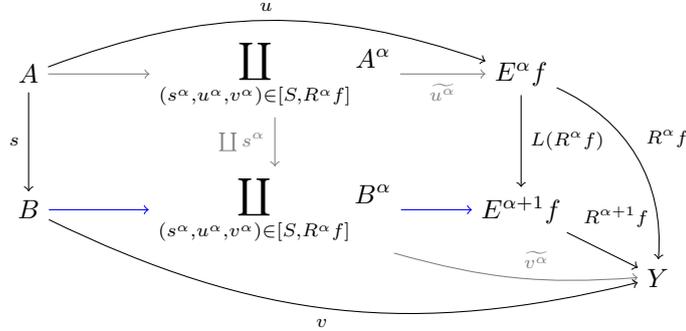
5.  $R^\kappa f \in S^\square$  となるような順序数  $\kappa$  があれば証明が完了する。これを示すため, 次の考察をする。

考察.

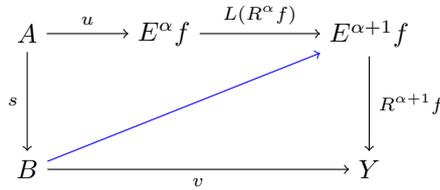
1. 順序数  $\alpha$  に対して元  $(s, u, v) \in [S, R^\alpha f]$  を考える。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & E^\alpha f \\ s \downarrow & & \downarrow R^\alpha f \\ B & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

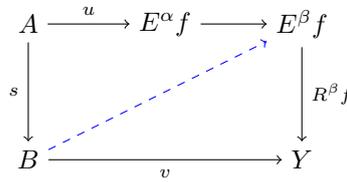
上の 4 で射  $R^{\beta+1}f$  を定めるときに考えた図式の左側に  $A \xrightarrow{s} B$  をつなげると、次の可換図式を得る ( $[S, f]$  のような集合全体にわたる余直積を考えた理由はこのステップのためである)。



不要な箇所を消して形を整えると、次の可換図式を得る。



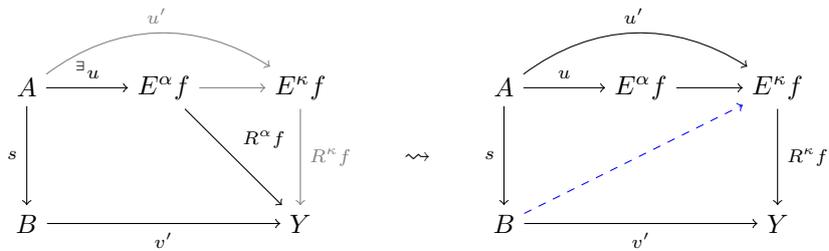
2. 以上より、任意の  $(s, u, v) \in [S, R^\alpha f]$  と任意の  $\beta > \alpha$  に対して、次のリフト問題 (外側の四角) は常に解 (点線の射で上下の三角を可換にするもの) を持つことがわかる。



3. ということは、順序数  $\kappa$  で性質

(\*) 任意の  $s \in S$  の始域  $A$  と任意の射  $A \xrightarrow{u'} E^\kappa f$  に対して、ある順序数  $\alpha < \kappa$  と射  $A \xrightarrow{u} E^\alpha f$  が存在して  $u' = (A \xrightarrow{u} E^\alpha f \rightarrow E^\kappa f)$  と分解できる。

をみたすものが存在すれば、任意の  $(s, u', v') \in [S, R^\kappa f]$  に対しある順序数  $\alpha < \kappa$  と射  $\text{dom}(s) \xrightarrow{u} E^\alpha f$  が存在して  $(s, u, v') \in [S, R^\alpha f]$  となるから、上の結果よりリフト問題  $(s, u', v')$  は解を持つ。



6. この考察から、上の性質 (\*) をみたす順序数  $\kappa$  が存在すれば  $R^\kappa f \in S^\square$  となることがわかった。

以下、より一般に、順序数  $\kappa$  であって次の性質をみたすものが存在することを示す。

(◇) 任意の  $s \in S$  の始域  $A$  と任意の関手  $F : \kappa \rightarrow \text{sSet}$  に対して、普遍性から一意に定まる射

$$\text{colim}_{\alpha < \kappa} \text{Hom}_{\text{sSet}}(A, F(\alpha)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(A, \text{colim}_{\alpha < \kappa} F(\alpha))$$

が全単射であるものが存在する。

各  $E^\alpha f$  の定義から、順序数  $\kappa$  が条件 (◇) をみたせば条件 (\*) をみたす。

証明のために、正則基数という種類の順序数を定義する。

**定義 付録 A.1.** 集合  $I$  の濃度 (cardinality)  $|I|$  とは、 $I$  と全単射であるような順序数のうち最小のものをいう。また、ある集合の濃度であるような順序数を基数 (cardinal) という。

**定義 付録 A.2.** 無限基数  $\lambda$  が正則基数 (regular cardinal) であるとは、任意の順序数の集合  $A$  で条件

- 任意の  $\alpha \in A$  に対して  $\alpha < \lambda$ .
- $|A| < \lambda$ .

をみたすものに対し、 $\sup A < \lambda$  が成り立つことをいう。

**注意 付録 A.3.** 任意の基数に対し、それより大きい正則基数が存在する\*6。

7. 任意の正則基数  $\lambda$  に対し、 $\lambda$  で添字付けられた図式の余極限と、射全体の集合の濃度が  $\lambda$  より小さいような圏で添字付けられた図式の極限 ( $\lambda$ -小極限という) は  $\text{Set}$  において交換する\*7。これは  $\text{Set}$  においてフィルター余極限と有限極限が交換すること\*8と同様に示せる。

8.  $\text{よ} : \Delta \rightarrow \text{sSet}$  を米田埋込とすると、任意の単体的集合  $K$  に対して  $K \cong \text{colim}(\text{よ} \downarrow K \rightarrow \Delta \xrightarrow{\text{よ}} \text{sSet})$  が成り立つ。ここで、 $\text{よ} \downarrow K$  は  $A$  の要素の圏 (category of elements) である。 $\lambda := \sup\{|\text{dom}(s)_n| \mid s \in S, n \geq 0\}$  とおき、正則基数  $\kappa$  を  $2^\lambda < \kappa$  なるように選べば、任意の  $S$  の元の始域  $A$  に対して  $|\text{Mor}(\text{よ} \downarrow A)| < \kappa$  が成り立つから、7より

$$\begin{aligned} \text{colim}_{\alpha < \kappa} \text{Hom}_{\text{sSet}}(A, F(\alpha)) &\cong \text{colim}_{\alpha < \kappa} \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{colim}_{\text{よ} \downarrow A} \Delta^n, F(\alpha)) \\ &\cong \text{colim}_{\alpha < \kappa} \lim_{\text{よ} \downarrow A} \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, F(\alpha)) \\ &\cong \lim_{\text{よ} \downarrow A} \text{colim}_{\alpha < \kappa} F(\alpha)_n \\ &\cong \lim_{\text{よ} \downarrow A} (\text{colim}_{\alpha < \kappa} F(\alpha))_n \\ &\cong \lim_{\text{よ} \downarrow A} \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, \text{colim}_{\alpha < \kappa} F(\alpha)) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(A, \text{colim}_{\alpha < \kappa} F(\alpha)) \end{aligned}$$

となる。ゆえに条件 (◇) をみたす順序数  $\kappa$  の存在がわかり、証明が完了した。□

\*6 例えば、任意の基数の後続基数 (successor cardinal) は正則である。

\*7 例えば [AR94, Proposition 1.59] に証明が記載されている。

\*8 例えば [Rie16, Theorem 3.8.9] に証明が記載されている。

## 付録 B 単体的集合の組合せ論

### B.1 単射の生成集合

1. この節の目的は、次の命題を示すことである。[Kerodon, Tag 0010] と [Rez22, §19, §20] を参考にした。

命題 付録 B.1.  $\text{Mono} = \overline{\text{Cell}}$  が成り立つ。

2. 以下、 $\subseteq$  向きの包含を示すために必要な事柄を準備する。

定義 付録 B.2.  $X$  を単体的集合、 $\sigma$  を  $X$  の  $n$ -単体とする。

- $\sigma$  が退化している (degenerate) とは、ある  $\Delta$  の全射  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$  と  $X$  の  $m$ -単体  $\tau \in X_m$  が存在して  $\sigma = (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} \Delta^m \xrightarrow{\tau} X)$  と書けることをいう。
- $\sigma$  が非退化 (non-degenerate) であるとは、 $\sigma$  が退化していないことをいう。

注意 付録 B.3.  $n$ -単体  $\sigma$  が退化していることは  $\sigma$  が“つぶれている”ことを、非退化であることは  $\sigma$  が“つぶれていない”ことを表す。例えば、 $\Delta^2$  の 2-単体  $(001)$  は退化しているが、 $(012)$  は非退化である (さらに、これは  $\Delta^2$  のただひとつの非退化な 2-単体である)。

定義 付録 B.4. 単体的集合  $X$  と各  $n \geq 0$  に対して、単体的集合  $\text{sk}_n(X) \subseteq X$  を、次の性質をみたすものうち最大の  $X$  の部分単体的集合と定め、 $X$  の  $n$ -骨格 ( $n$ -skeleton) という。

- 任意の  $m > n$  に対し、 $\text{sk}_n(X)_m$  の元はすべて退化している。

注意 付録 B.5.  $\text{sk}_n(X)$  は次のように表示できる。

- $m \leq n$  に対しては  $\text{sk}_n(X)_m = X_m$ .
- $m > n$  に対しては

$$\text{sk}_n(X)_m = \{x \in X_m \mid \exists \alpha : [m] \rightarrow [n], \exists y \in X_n, X(\alpha)(y) = x\}.$$

逆に、これを用いて  $n$ -骨格  $\text{sk}_n(X)$  を定義できる (証明は省くが簡単に確かめられる)。

命題 付録 B.6. 任意の単体的集合  $X$  に対して、 $X = \bigcup_{n \geq 0} \text{sk}_n(X)$  が成り立つ。

証明. 注意 付録 B.5 より明らか。 □

命題 付録 B.7 (Eilenberg-Zilber の補題). 任意の単体的集合の射  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  に対して、 $\Delta$  の全射  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$  と非退化な  $m$ -単体  $\tau : \Delta^m \rightarrow X$  が一意に存在して、

$$\sigma = (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} \Delta^m \xrightarrow{\tau} X)$$

と書ける。

証明.

1. 存在については明らか。実際,  $\sigma$  は退化しているか非退化かのどちらかであり, 後者の場合は  $\alpha = \text{id}_{[m]}$  とすればよく, 前者の場合は退化の定義 付録 B.2 における  $m$  を最小となるようにとればよい。
2. 一意性を示す。これには次の事実を用いる。

- $\Delta$  の射  $\alpha : [n] \rightarrow [m]$  に対して  $\Gamma(\alpha) := \{\beta : [m] \rightarrow [n] \mid \alpha \circ \beta = \text{id}_{[m]}\}$  とおく。  $\alpha$  が全射なら  $\Gamma(\alpha)$  は空でない。このとき,  $\Delta$  の全射  $\alpha, \alpha'$  が  $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha')$  をみたすなら  $\alpha = \alpha'$  となる。

これは  $\beta \in \Gamma(\alpha)$  の各  $i \in [m]$  における値  $\beta(i)$  が逆像  $\alpha^{-1}(i)$  の元のどれかであることと, 各  $i \in [m]$  に対する逆像  $\alpha^{-1}(i)$  の情報で  $\alpha$  が一意に決まることからわかる。

3.  $\sigma$  の 2 つの分解  $\Delta^n \xrightarrow{\alpha} \Delta^m \xrightarrow{\tau} X$  と  $\Delta^n \xrightarrow{\alpha'} \Delta^{m'} \xrightarrow{\tau'} X$  が与えられたとき,  $\beta \in \Gamma(\alpha)$  と  $\beta' \in \Gamma(\alpha')$  を任意にとると,  $\tau = \tau' \circ (\alpha' \circ \beta)$ ,  $\tau' = \tau \circ (\alpha \circ \beta')$  が成り立つ。よって,  $\tau, \tau'$  の非退化性から,

$$\begin{aligned} \alpha' \circ \beta : [m] &\rightarrow [m'] \text{ と } \alpha \circ \beta' : [m'] \rightarrow [m] \text{ が単射。} \\ \implies m &= m'. \\ \implies \alpha' \circ \beta &= \alpha \circ \beta' = \text{id}_{[m]}. \\ \implies \tau = \tau' \text{ かつ } \beta &\in \Gamma(\alpha') \text{ かつ } \beta' \in \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

4.  $\beta, \beta'$  は任意に選んでいたから 3 の推論の最後より  $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha')$  がいえ, 2 より  $\alpha = \alpha'$  となる。  $\square$

定理 付録 B.8. 単体的集合  $A \subseteq B$  と各  $n \geq 0$  に対して, 次の可換図式は押し出しである。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in S_n} \partial \Delta^n & \longrightarrow & A \cup \text{sk}_{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in S_n} \Delta^n & \longrightarrow & A \cup \text{sk}_n(X) \end{array}$$

ここで,  $S_n := \{\sigma \in B_n \mid \sigma \notin A_n \text{ かつ } \sigma \text{ は非退化}\}$  である。

証明. 命題 付録 B.7 を使えば簡単に示せる。詳細は省略する。  $\square$

3. 冒頭の命題を証明する。

命題 付録 B.1 の証明.

( $\subseteq$ ): 定理 付録 B.8 と命題 付録 B.6 より, 任意の単体的集合の単射は  $\text{Cell}$  の元たちの余直積の押し出しの超限合成として書ける。よって, 弱飽和類の定義より包含が成り立つ。

( $\supseteq$ ):  $\text{Mono}$  が弱飽和類であることは簡単に確かめられるから,  $\text{Cell} \subseteq \text{Mono}$  より  $\overline{\text{Cell}} \subseteq \text{Mono}$  が成り立つ。  $\square$

## B.2 内緩和射の生成クラス

1. この節の目的は、次の命題を示すことである。[Kerodon, Tag 007F] と [Rez22, 78.4, 78.5] を参考にした。

命題 付録 B.9. 等式  $\text{InnAno} = \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono}}$  が成り立つ。

証明.

( $\subseteq$ ): 同値

$$\text{InnAno} \subseteq \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono}} \iff \text{InnHorn} \subseteq \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono}}$$

より、右側を示せばよい。これは以下で示す補題 付録 B.10 からわかる。

( $\supseteq$ ): 同値

$$\begin{aligned} \overline{\{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono}} \subseteq \text{InnAno} &\iff \{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Mono} \subseteq \text{InnAno} \\ &\iff \{\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2\} \square \text{Cell} \subseteq \text{InnAno} \end{aligned}$$

より、最後の条件を示せばよい。これは以下で示す補題 付録 B.11 からわかる。  $\square$

補題 付録 B.10.  $(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n) \in \text{InnHorn}$  は  $(\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2) \square (\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n)$  のレトラクトである。

証明. 射  $(\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2) \square (\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n)$  の始域を  $X$  とおく。

1.  $\bar{s}: \Delta^n \rightarrow \Delta^2 \times \Delta^n$  を次のような写像  $s: [n] \rightarrow [n] \times [2]$  により定める。各  $0 \leq x \leq n$  に対して、

$$s(x) := \begin{cases} (0, x) & (x < i), \\ (1, x) & (x = i), \\ (2, x) & (x > i). \end{cases}$$

また、 $\bar{r}: \Delta^2 \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  を次のような写像  $r: [2] \times [n] \rightarrow [n]$  により定める。各  $j = 0, 1, 2$  と  $0 \leq x \leq n$  に対して、

$$r(j, x) := \begin{cases} x & (j = 0 \text{ かつ } x < i), \\ i & (\text{上下以外の場合}), \\ x & (j = 2 \text{ かつ } x > i). \end{cases}$$

このとき、明らかに  $r \circ s = \text{id}_{[n]}$  だから  $\bar{r} \circ \bar{s} = \text{id}_{\Delta^n}$  である。

2.  $\bar{s}(\Lambda_i^n) \subseteq X$  である。これは、 $s(i) = (1, i)$  より、 $\Lambda_i^n$  の全ての非退化な  $(n-1)$ -単体が  $\bar{s}$  により  $\Lambda_1^2 \times \Delta^n$  の中に写るためである。

3.  $\bar{r}(X) \subseteq \Lambda_i^n$  である。

証明.

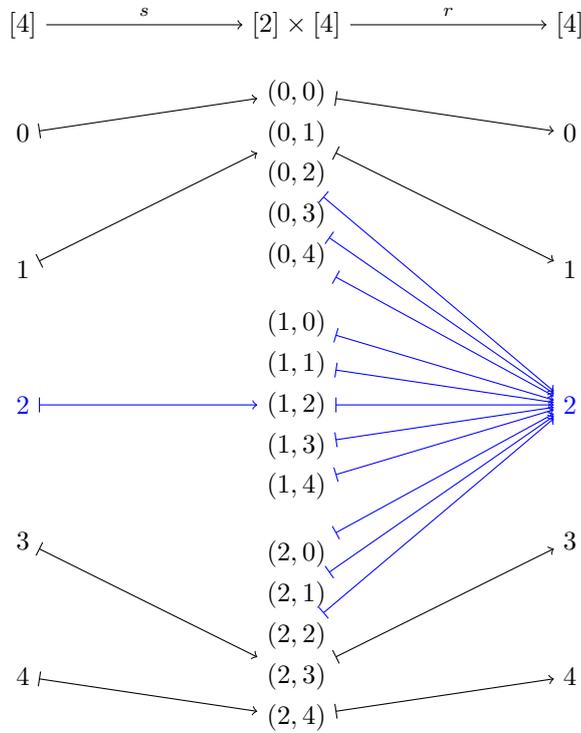
1.  $X$  の任意の非退化な  $(n-1)$ -単体の  $\bar{r}$  による像が頂点  $i$  を含めばよい。
2. 写像  $r$  で  $i \in [n]$  に写らないのは  $(0, 0), \dots, (0, i-1), (2, i+1), \dots, (2, n) \in [2] \times [n]$  のみ。
3. これら  $[2] \times [n]$  の元は第 1 成分に 1 を含まず、かつ第 2 成分に  $i$  を含まないから、これらの頂点のどれかのみを含む  $\Delta^2 \times \Delta^n$  の非退化な  $(n-1)$ -単体は  $X$  に含まれない。
4. よって、対偶をとれば、 $X$  の非退化な  $(n-1)$ -単体を  $\bar{r}$  で写せば像は必ず頂点  $i$  を含む。 □

4. 以上より、次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{\Lambda_i^n} & & \\
 & \swarrow & \text{arc} & \searrow & \\
 \Lambda_i^n & \xrightarrow{\bar{s}|_{\Lambda_i^n}} & X & \xrightarrow{\bar{r}|_X} & \Lambda_i^n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\bar{s}} & \Delta^2 \times \Delta^n & \xrightarrow{\bar{r}} & \Delta^n \\
 & \swarrow & \text{arc} & \searrow & \\
 & & \text{id}_{\Delta^n} & & 
 \end{array}$$

□

例.  $n = 4, i = 2$  のとき、上の写像  $s, r$  は次のようになる。



補題 付録 B.11. 各  $n \geq 1$  に対して  $(\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2) \square (\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n) \in \text{InnAno}$  である。

2. 以下、この節では補題 付録 B.11 の証明を行う。整理された証明を記述する前に、証明に至るまでの考察をしておく。 $X := (\Lambda_1^2 \times \Delta^n) \cup (\Delta^2 \times \partial\Delta^n)$  とおく。

考察.

1. クラス  $\text{InnAno}$  は押し出しと合成で閉だから、 $X$  に  $\text{InnHorn}$  の元を押し出しにより貼り合わせていくことで  $\Delta^2 \times \Delta^n$  が作れることを言えばよい。

2.  $X$  に欠けている単体は、以下の通りである。

- $\Delta^2 \times \Delta^n$  の非退化な  $(n+1)$ -単体の一部。
- $\Delta^2 \times \Delta^n$  の非退化な  $(n+2)$ -単体全て。

3. 少なくとも、 $\Delta^2 \times \Delta^n$  の非退化な  $(n+2)$ -単体はすべて  $X$  に貼り付ける必要がある。これらのなす集合を  $S_{n+2} \subseteq (\Delta^2 \times \Delta^n)_{n+2}$  とかく。

4.  $S_{n+2}$  の元を  $\text{InnHorn}$  の元を使って貼り付けたいから、それをするのに必要な  $X$  に欠けている  $(n+1)$ -単体を先に貼り付ける方針をとる。これらのなす集合を  $S_{n+1} \subseteq (\Delta^2 \times \Delta^n)_{n+1}$  とかく。

5. したがって、考えるべき問題は以下の 4 つである。

- (A)  $S_{n+2}$  の元を全て列挙すること。
- (B)  $S_{n+2}$  の元を  $X$  に貼り付ける順番を決定すること。
- (C)  $S_{n+1}$  の元を全て列挙すること。
- (D)  $S_{n+1}$  の元を  $X$  に貼り付ける順番を決定すること。

$S_{n+2}$  の元の列挙.

1.  $\tau \in S_{n+2}$  とする。 $\tau$  の頂点の第 2 成分には 0 から  $n$  までが全て現れる。

証明.

1. 1 つでも現れない数があるとすると、 $\tau$  の頂点数が  $n+3$  であることから、ある  $0 \leq k \leq n$  が 4 連続で  $\tau$  の頂点の第 2 成分に現れる。
2. しかし、頂点の第 1 成分は 0, 1, 2 のどれかだから、この場合  $\tau$  は  $(n+1)$ -単体につぶれるしかない。すなわち、非退化性に矛盾する。 □

2.  $[n]$  の元の個数は  $n+1$  であることと  $\tau$  の頂点数が  $n+3$  であることより、 $\tau$  の頂点の第 2 成分は

- (a)  $0 \leq a < b \leq n$  があり、 $a$  と  $b$  がそれぞれ 2 連続で現れる。
- (b)  $0 \leq a \leq n$  があり、 $a$  が 3 連続で現れる。

のどちらか。

3. 表示すると、次のようになる。

$$(a) \text{ の場合 : } \tau = \left\langle \begin{array}{cccccccc} p_0 & \cdots & p_a & q_a & \cdots & q_b & r_b & \cdots & r_n \\ 0 & \cdots & a & a & \cdots & b & b & \cdots & n \end{array} \right\rangle$$

$$(b) \text{ の場合 : } \tau = \left\langle \begin{array}{cccccccc} p_0 & \cdots & p_a & q_a & r_a & \cdots & r_n \\ 0 & \cdots & a & a & a & \cdots & n \end{array} \right\rangle$$

ここで、各列が  $\tau$  の頂点を表している。また、1 行目に現れる数はすべて  $0, 1, 2$  のいずれかである。

4.  $\tau$  が非退化であることから、1 行目は次のようになるしかない。

$$(a) \text{ の場合 : } p_0 = \cdots = p_a = 0, q_a = \cdots = q_b = 1, r_b = \cdots = r_n = 2$$

$$(b) \text{ の場合 : } p_0 = \cdots = p_a = 0, q_a = 1, r_a = \cdots = r_n = 2$$

5. 以上の結果をまとめると、(A) に対する解答が得られる。

任意の  $\tau \in S_{n+2}$  は、ある  $0 \leq a \leq b \leq n$  によって

$$\tau = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & a & a & \cdots & b & b & \cdots & n \end{array} \right\rangle$$

という形で書ける。

□

6. Step 1 の結果をふまえて、各  $0 \leq a \leq b \leq n$  に対して

$$\tau_{ab} := \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & a & a & \cdots & b & b & \cdots & n \end{array} \right\rangle$$

と定義する。 $0 \leq a \leq b \leq n$  をみたく組  $(a, b)$  をある順番で動かしてその順で  $\tau_{ab}$  を貼り合わせていくことになるから、(B) はこの動かす順番を決定する問題である。

7.  $(n+2)$ -単体  $\tau_{ab}$  の頂点  $(i, j)$  を取り除いてできた  $(n+1)$ -単体を  $d_{(i,j)}\tau_{ab}$  とかく。 $\tau_{ab}$  の頂点の第 2 成分で被りがあるのは  $a$  と  $b$  だけだから、 $(0, a), (1, a), (1, b), (2, b)$  以外の  $\tau_{ab}$  の頂点  $(i, j)$  に対して、 $(n+1)$ -単体  $d_{(i,j)}\tau_{ab}$  は  $\Delta^2 \times \partial\Delta^n \subseteq X$  に含まれる。

8. よって、考えるべきは  $(n+1)$ -単体  $d_{(0,a)}\tau_{ab}, d_{(1,a)}\tau_{ab}, d_{(1,b)}\tau_{ab}, d_{(2,b)}\tau_{ab}$  である。

$d_{(0,a)}\tau_{ab}$  の考察.

1.  $\tau_{ab}$  の形から、 $a = 0$  と  $a > 0$  で場合分けして計算すると次のようになる。

$$a = 0 \text{ の場合 : } d_{(0,0)}\tau_{0b} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & b & b & \cdots & n \end{array} \right\rangle$$

$$a > 0 \text{ の場合 : } d_{(0,a)}\tau_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & \cdots & a-1 & a & \cdots & b & b & \cdots & n \end{array} \right\rangle = d_{(1,a-1)}\tau_{a-1,b}.$$

2. 前者は  $\Lambda_1^2 \times \Delta^n \subseteq X$  に含まれるから後者の場合を考えればよいが、上の 2 つ目の式は各  $0 \leq b \leq n$  に対して

$$(0, b) \rightarrow \cdots \rightarrow (a-1, b) \rightarrow (a, b) \rightarrow \cdots \rightarrow (b, b)$$

の順になるような貼り付けを行えばよいことを意味する。

□

$a < b$  の場合の  $d_{(1,b)}\tau_{ab}$  の考察.

1. 計算すると次のようになる。

$$d_{(1,b)}\tau_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & b-1 & b & \dots & n \end{array} \right\rangle = d_{(2,b-1)}\tau_{a,b-1}.$$

2. この式は、各  $0 \leq a \leq n$  に対して

$$(a, a) \rightarrow (a, a+1) \rightarrow \dots \rightarrow (a, n-1) \rightarrow (a, n)$$

の順になるような貼り付けを行えば前段階の  $d_{(2,b)}\tau_{ab}$  の場合に帰着することを意味する。□

9. 上の 2 つの結果より、組  $(a, b)$  の遷移順は次のようにすればよさそうである。

$$\begin{aligned} & (0, 0) \\ & \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \\ & \quad \vdots \\ & \rightarrow (0, a) \rightarrow (1, a) \rightarrow \dots \rightarrow (a-1, a) \rightarrow (a, a) \\ & \quad \vdots \\ & \rightarrow (0, b) \rightarrow (1, b) \rightarrow \dots \rightarrow (a-1, b) \rightarrow (a, b) \rightarrow \dots \rightarrow (b-1, b) \rightarrow (b, b) \\ & \quad \vdots \\ & \rightarrow (0, n) \rightarrow (1, n) \rightarrow \dots \rightarrow (a-1, n) \rightarrow (a, n) \rightarrow \dots \rightarrow (n-1, n) \rightarrow (n, n) \end{aligned}$$

上から下に  $b$  の値が増加し、左から右に  $a$  の値が増加している。そのため、上の 2 つの考察で述べた貼り付けの順番の条件はともにみたされる。これより (B) と、 $(n+1)$ -単体  $d_{(0,a)}\tau_{ab}$  と  $a < b$  の場合の  $d_{(1,b)}\tau_{ab}$  に関する問題は完了した。

10. よって、考えるべきは  $d_{(1,a)}\tau_{ab}$ ,  $d_{(2,b)}\tau_{ab}$  である ( $a = b$  の場合の  $d_{(1,b)}\tau_{ab}$  は  $d_{(1,a)}\tau_{aa}$  だから前者の特別な場合である)。先に前者を考察する。

$d_{(1,a)}\tau_{ab}$  の考察.

1.  $\tau_{ab}$  の形から、 $a < b$  と  $a = b$  で場合分けして計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} a < b \text{ の場合} : d_{(1,a)}\tau_{ab} &= \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a+1 & \dots & b & b & \dots & n \end{array} \right\rangle \\ a = b \text{ の場合} : d_{(1,a)}\tau_{aa} &= \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & n \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

2. どちらの場合もこれは  $X$  に含まれない。

3. また、任意の  $0 \leq i < a$  に対する  $(n+2)$ -単体  $\tau_{ib}$  にも含まれない。

$$\tau_{ib} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & i & i & \dots & b & b & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

で、 $i < a$  よりこれには頂点  $(0, a)$  が含まれないため。

4. さらに、任意の  $0 \leq i \leq j < b$  に対する  $(n+2)$ -単体  $\tau_{ij}$  にも含まれない。

$$\tau_{ij} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & i & i & \dots & j & j & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

だから、これには  $a < b$  の場合頂点  $(1, b)$  が含まれず、 $a = b$  の場合頂点  $(0, a)$  が含まれない。

5. したがって、9 で図示した貼り付け順で  $X$  に  $\tau_{00}$  から  $\tau_{a-1, b}$  までを貼り付けてできた単体的集合に  $(n+2)$ -単体  $d_{(1, a)}\tau_{ab}$  は含まれない。つまり、面  $d_{(1, a)}\tau_{ab}$  はそれまでの貼り付けのステップで得られない。□

11. この考察より、各  $(n+2)$ -単体  $\tau_{ab}$  は、頂点  $(1, a)$  が欠けた内角体からの包含  $(d_{(1, a)}\tau_{ab} \hookrightarrow \tau_{ab}) \cong (\Lambda_{a+1}^{n+2} \hookrightarrow \Delta^{n+2}) \in \text{InnHorn}$  を貼り付けて得ることにすればよさそうである。

以上より、 $d_{(2, b)}\tau_{ab}$  の考察に帰着される。この中で、問題 (C), (D) の解答も得られる。

$d_{(2, b)}\tau_{ab}$  の考察.

1.  $\tau_{ab}$  の形から、 $b < n$  と  $b = n$  で場合分けして計算すると次のようになる。

$$b < n \text{ の場合} : d_{(2, b)}\tau_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & b & b+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

$$b = n \text{ の場合} : d_{(2, n)}\tau_{an} = \left\langle \begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & n \end{array} \right\rangle.$$

2. 後者は  $\Lambda_1^2 \times \Delta^n \subseteq X$  に含まれるから前者の場合を考えればよい。 $0 \leq a \leq b < n$  に対して  $\sigma_{ab} := d_{(2, b)}\tau_{ab}$  とおく。

3. これらの  $(n+1)$ -単体  $\sigma_{ab}$  があれば 9 と 11 に述べた方法により  $\tau_{ab}$  がすべて  $X$  に貼り付けられるから、 $S_{n+1} = \{\sigma_{ab} \mid 0 \leq a \leq b < n\}$  ということになる。以下、 $\sigma_{ab}$  たちをどのように貼り付けるか、どのような順番で貼り付けるかを決定する。

4.  $\sigma_{ab}$  の第 2 成分で被りがあるのは  $a$  だけだから、 $(0, a)$ ,  $(1, a)$  以外の  $\sigma_{ab}$  の頂点  $(i, j)$  に対して、 $n$ -単体  $d_{(i, j)}\sigma_{ab}$  は  $\Delta^2 \times \partial\Delta^n \subseteq X$  に含まれる。

5. よって、考えるべきは  $n$ -単体  $d_{(0, a)}\sigma_{ab}$ ,  $d_{(1, a)}\sigma_{ab}$  である。

$d_{(0,a)}\sigma_{ab}$  の考察.

1.  $\sigma_{ab}$  の形から,  $a = 0$  と  $a > 0$  で場合分けして計算すると次のようになる。

$$a = 0 \text{ の場合 : } d_{(0,0)}\sigma_{0b} = \left\langle \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & b & b+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

$$a > 0 \text{ の場合 : } d_{(0,a)}\sigma_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a-1 & a & \dots & b & b+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle = d_{(1,a-1)}\sigma_{a-1,b}.$$

2. 前者は  $\Lambda_1^2 \times \Delta^n \subseteq X$  に含まれるから後者の場合を考えればよいが, 上の 2 つ目の式は各  $0 \leq b \leq n$  に対して

$$(0, b) \rightarrow \dots \rightarrow (a-1, b) \rightarrow (a, b) \rightarrow \dots \rightarrow (b, b)$$

の順になるような貼り付けを行えばよいことを意味する。よって,  $\sigma_{ab}$  の貼り付け順も 9 と同じにする。□

$d_{(1,a)}\sigma_{ab}$  の考察.

1.  $\tau_{ab}$  の形から,  $a < b$  と  $a = b$  で場合分けして計算すると次のようになる。

$$a < b \text{ の場合 : } d_{(1,a)}\sigma_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a+1 & \dots & b & b+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

$$a = b \text{ の場合 : } d_{(1,a)}\sigma_{aa} = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

2. 10 と同じ考察により, 9 で図示した貼り付け順で  $X$  に  $\sigma_{00}$  から  $\sigma_{a-1,b}$  までを貼り付けてできた単体的集合に  $n$ -単体  $d_{(1,a)}\sigma_{ab}$  が含まれないとわかる。□

6. 以上より, 9 に示した順で頂点  $(1, a)$  が欠けた内角体からの包含  $(d_{(1,a)}\sigma_{ab} \hookrightarrow \sigma_{ab}) \cong (\Lambda_{a+1}^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}) \in \text{InnHorn}$  を  $X$  に貼り付けていけばよいことがわかった。□

12. これで  $X$  から  $\Delta^2 \times \Delta^n$  を得るために必要な  $(n+1)$ -単体,  $(n+2)$ -単体とその貼り付ける順番が全てわかった。まとめると, 次のような手順で  $\Delta^2 \times \Delta^n$  が得られると示せたことになる。

(1) 各  $0 \leq a \leq b < n$  に対し, 9 で示した順で  $(n+1)$ -単体  $\Lambda_{a+1}^{n+1} \hookrightarrow \Delta^{n+1}$  を貼り付けていく。

(2) その後, 各  $0 \leq a \leq b \leq n$  に対し, 9 で示した順で  $(n+2)$ -単体  $\Lambda_{a+1}^{n+2} \hookrightarrow \Delta^{n+2}$  を貼り付けていく。

□

3. 最後に, 証明の形で書いておく。

補題 付録 B.11 の証明.

1.  $X := (\Lambda_1^2 \times \Delta^n) \cup (\Delta^2 \times \partial\Delta^n)$  とおく。また, 各  $0 \leq a \leq b < n$  に対して  $\Delta^2 \times \Delta^n$  の  $(n+1)$ -単体  $\sigma_{ab}$  を

$$\sigma_{ab} = \left\langle \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & b & b+1 & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

で定める。

2. 各  $-1 \leq b \leq n-1$  に対し単体的集合  $X(b) \subseteq \Delta^2 \times \Delta^n$  を次のように帰納的に定める。

- $b = -1$  のとき,  $X(-1) := X$  とする。
- $X(b-1)$  が定まっているとき, 各  $-1 \leq a \leq b$  に対して単体的集合  $X(b-1)^a \subseteq \Delta^2 \times \Delta^n$  を次のように帰納的に定める。
  - $a = -1$  のとき,  $X(b-1)^{-1} := X(b-1)$  とする。
  - $X(b-1)^{a-1}$  が定まっているとき,  $X(b-1)^a$  を次の押し出しで定める。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{a+1}^{n+1} & \xrightarrow{d_{(1,a)}\sigma_{ab}} & X(b-1)^{a-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{ab}} & X(b-1)^a \end{array}$$

ここで, 射  $\Lambda_{a+1}^{n+1} \rightarrow X(b-1)^{a-1}$  は考察の 11 より存在がわかる。また, InnAno は押し出しで閉だから射  $X(b-1)^{a-1} \hookrightarrow X(b-1)^a$  は内緩和射である。

このとき,  $X(b) := X(b-1)^b$  と定める。すると, InnAno は合成で閉だから包含  $X(b-1) \hookrightarrow X(b)$  は内緩和射である。

このとき, 包含  $X = X(-1) \hookrightarrow X(n-1)$  は内緩和射である。

3. 各  $0 \leq a \leq b \leq n$  に対して  $\Delta^2 \times \Delta^n$  の  $(n+2)$ -単体  $\tau_{ab}$  を

$$\tau_{ab} := \left\langle \begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & a & a & \dots & b & b & \dots & n \end{array} \right\rangle$$

で定める。考察の (A) より, これらは  $\Delta^2 \times \Delta^n$  に含まれる全ての非退化な  $(n+2)$ -単体である。

4. 各  $-1 \leq b \leq n-1$  に対し単体的集合  $Y(b) \subseteq \Delta^2 \times \Delta^n$  を次のように帰納的に定める。

- $b = -1$  のとき,  $Y(-1) := X(n-1)$  とする。
- $Y(b-1)$  が定まっているとき, 各  $-1 \leq a \leq b$  に対して単体的集合  $Y(b-1)^a \subseteq \Delta^2 \times \Delta^n$  を次のように帰納的に定める。
  - $a = -1$  のとき,  $Y(b-1)^{-1} := Y(b-1)$  とする。
  - $Y(b-1)^{a-1}$  が定まっているとき,  $Y(b-1)^a$  を次の押し出しで定める。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{a+1}^{n+2} & \xrightarrow{d_{(1,a)}\tau_{ab}} & Y(b-1)^{a-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n+2} & \xrightarrow{\tau_{ab}} & Y(b-1)^a \end{array}$$

ここで, 射  $\Lambda_{a+1}^{n+2} \rightarrow Y(b-1)^{a-1}$  は考察の 8, 10, 11 より存在がわかる。また, 射  $Y(b-1)^{a-1} \hookrightarrow Y(b-1)^a$  は内緩和射である。

このとき,  $Y(b) := Y(b-1)^b$  と定める。すると, 包含  $Y(b-1) \hookrightarrow Y(b)$  は内緩和射である。

このとき, 包含  $Y(-1) \hookrightarrow Y(n)$  は内緩和射である。

5. 3 より  $Y(n) \cong \Delta^2 \times \Delta^n$  である。よって, 2 と 4 より問題の包含  $X = X(-1) \hookrightarrow X(n-1) = Y(-1) \hookrightarrow Y(n) = \Delta^2 \times \Delta^n$  は内緩和射である。□

### B.3 押し出しジョインの計算

1. この節の目的は、次の命題を示すことである。[Kerodon, Tag 018N] を参考にした。

命題. 次の 2 つの同型が成り立つ。

- (1) 各  $0 \leq i \leq n$ ,  $k \geq 0$  に対して  $(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n) \boxtimes (\partial\Delta^k \hookrightarrow \Delta^k) \cong (\Lambda_i^{n+1+k} \hookrightarrow \Delta^{n+1+k})$ .
- (2) 各  $0 \leq i \leq n$ ,  $k \geq 0$  に対して  $(\partial\Delta^k \hookrightarrow \Delta^k) \boxtimes (\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n) \cong (\Lambda_{k+1+i}^{k+1+n} \hookrightarrow \Delta^{k+1+n})$ .

2. 証明に用いる単体的集合の生成集合に関する事柄を述べる。この項目は [Alg21] を参考にした。

定義 付録 B.12. 各  $0 \leq i \leq n$  に対して  $\Delta$  の射  $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$  と  $\sigma_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$  を次のように定義する。

$$\delta_i^n(x) := \begin{cases} x & (x < i) \\ x+1 & (i \leq x) \end{cases} \quad \sigma_i^n(x) := \begin{cases} x & (x \leq i) \\ x-1 & (i < x) \end{cases}$$

$\delta_i^n$  の行き先

$\sigma_i^n$  の行き先

定義 付録 B.13.  $X$  を単体的集合,  $A \subseteq X_n$  とする。 $n$ -単体的集合が  $A$  を含むような最小の  $X$  の部分単体的集合  $Y$  を  $A$  で生成された単体的集合という。

補題 付録 B.14. 定義 付録 B.13 の状況で、各  $k \geq 0$  に対して次の等式が成り立つ。

$$Y_k = \{X(\alpha)(\sigma) \mid \sigma \in A, \alpha : [k] \rightarrow [n] \text{ in } \Delta\}.$$

証明. 右辺の条件と  $Y$  の最小性を用いる。詳細は [Alg21, 命題 3] を見よ。 □

例 付録 B.15. (1) 各  $n \geq 0$  に対して、 $\Delta^n$  は  $\{\text{id}_{[n]}\} \subseteq \Delta^n$  で生成される。

(2) 各  $n \geq 0$  に対して、 $\partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  は  $\{\delta_i^n \mid 0 \leq i \leq n\} \subseteq \Delta^n_{n-1}$  で生成される。

(3) 各  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$  に対して、 $\Lambda_k^n \subseteq \Delta^n$  は  $\{\delta_i^n \mid 0 \leq i \leq n, i \neq k\} \subseteq \Delta^n_{n-1}$  で生成される。

補題 付録 B.16.  $X, Y$  を単体的集合とし、それぞれ  $A \subseteq X_m$ ,  $B \subseteq Y_n$  で生成されているとする。このとき、単体的集合  $X \star Y$  は  $A \times B \subseteq X_m \times Y_n \subseteq (X \star Y)_{m+n+1}$  により生成される。

証明. ジョインの定義と補題 付録 B.14 を用いればよい。 □

### 3. 冒頭の命題を証明する。

証明. 同様であるから, (1) のみ示す。

1. 一意的な同型射  $\phi: \Delta^n \star \Delta^k \xrightarrow{\cong} \Delta^{n+1+k}$  が存在する。この射  $\phi$  が,  $(\Lambda_i^n \star \Delta^k) \cup (\Delta^n \star \partial\Delta^k)$  に制限したときに  $\Lambda_i^{n+1+k}$  への同型を与えることを示せばよい。

2.  $\Lambda_i^n \star \Delta^k$  はその  $(n+k)$ -単体の集合  $\{(\delta_j^n, \text{id}_{[k]}) \mid j \in [n] \setminus \{i\}\} \subseteq (\Lambda_i^n)_{n-1} \times \Delta_k^k$  で生成される。また,  $\Delta^n \star \partial\Delta^k$  はその  $(n+k)$ -単体の集合  $\{(\text{id}_{[n]}, \delta_j^k) \mid j \in [k]\} \subseteq \Delta_n^n \times (\partial\Delta^k)_{k-1}$  で生成される。

3. これらの  $(n+k)$ -単体は  $\phi$  によって次のように写る。

$$\begin{array}{ccc}
 (\Lambda_i^n \star \Delta^k)_{n+k} \cup (\Delta^n \star \partial\Delta^k)_{n+k} & \xrightarrow{\phi} & (\Lambda_i^{n+1+k})_{n+k} \\
 (\delta_0^n, \text{id}_{[k]}) & \longmapsto & \delta_0^{n+1+k} \\
 \vdots & & \vdots \\
 *(\delta_i^n, \text{id}_{[k]}) & \longmapsto & * \delta_i^{n+1+k} \\
 \vdots & & \vdots \\
 (\delta_n^n, \text{id}_{[k]}) & \longmapsto & \delta_n^{n+1+k} \\
 (\text{id}_{[n]}, \delta_0^k) & \longmapsto & \delta_{n+1}^{n+1+k} \\
 \vdots & & \vdots \\
 (\text{id}_{[n]}, \delta_k^k) & \longmapsto & \delta_{n+1+k}^{n+1+k}
 \end{array}$$

ここで, \* はその元を省くことを意味する。

4. したがって,  $\phi$  は生成元の間で 1 対 1 対応を与えるから, 1. の主張が成り立つ。 □

## 参考文献

- [AR94] Jiří Adámek and Jiří Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge University Press, 1994.
- [Alg21] alg-d, 例: 単体的集合, 2021, [http://alg-d.com/math/kan\\_extension/simplex.pdf](http://alg-d.com/math/kan_extension/simplex.pdf).
- [HTT] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009, available at <https://www.math.ias.edu/~lurie/>.
- [Kerodon] Jacob Lurie, *Kerodon*, <https://kerodon.net>.
- [Rem22] Re\_menal,  $\infty$ -groupoid は空間である ～Joyal の拡張定理の応用とその証明～, 2022, <https://mathlog.info/articles/3761>.
- [Rez22] Charles Rezk, *Introduction to quasicategories*, 2022, <https://faculty.math.illinois.edu/~rezk/quasicats.pdf>.
- [Rie16] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016, available at <https://emilyriehl.github.io/files/context.pdf>.