空間の常ホモロジーについて

Re1yra

2024 年 12 月 08 日

概要

本稿では、($\mathbb{Z}$ 係数) ordinary homology H_n を空間のなす ∞-圏 $\mathcal{S}$ からアーベル群のなす圏 Ab への関手として ∞-圏論的に定義し、それが通常の ordinary homology に関する Eilenberg–Steenrod axiom に対応する性質をみたすことを示します。self-contained には書かれていないため、適宜 [HTT] や [HA] などの ∞-圏論に関する文献を参照してください。なお、H_n の定義は MathOverflow に投稿された質問 [MOF] への回答を参考にしました。

目次

記法

- $(\infty, 1)$-圏のことを単に ∞-圏と呼ぶことにする。 通常の圏は 1-圏と呼ぶこともある。
- ∞-圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー 1-圏を $\mathrm{h}\mathcal{C}$ で表す。
- 1-圏 $\mathcal{C}$ を ∞-圏とみなしているとき、そのことを強調するために対応する ∞-圏を $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ と書くことがある。
- 安定 ∞-圏や加法 1-圏における余直積は記号 $\oplus$ で表す。 それ以外の (∞-)圏においては記号 $\coprod$ を用いる。
- $\mathcal{S}$ を空間 (a.k.a. anima, ∞-groupoid, homotopy type, ...) のなす ∞-圏とする。 $\mathcal{S}$ の終対象を $*$ で表し、その点を pt で表す。
- 可換環 R に対し、R 上の加群のなす chain complex 全体のなす圏を $\mathrm{Ch}(R)$ と表す。

1 ordinary homology の定義に使用する概念

1.1. すべての予備知識を丁寧に解説することはできないため、安定 ∞-圏については適宜 [HA] の 1 章を参考にせよ。

ordinary homology の定義に使用するのは、 **$\mathbb{Z}$ の導来 ∞-圏** とその上の **t-structure** である。 まず初めに安定 ∞-圏上の t-structure の一般論を紹介したのち、それらについて述べることとする。

1.1 安定 ∞-圏上の t-structure

1.1.1. まず記法を導入する。 安定 ∞-圏 $\mathcal{C}$ と整数 n に対して、$\mathcal{C}$ 上の自己関手 $[n] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を次のように定義する：

- n が 0 以上なら $[n] := \Sigma^n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
- n が負なら $[n] := \Omega^{-n} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

また、$\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{D}$ に対して、関手 $[n]$ による $\mathcal{D}$ の本質的像を $\mathcal{D}[n]$ と表す。

定義 1.1.2. ([HA, 1.2.1.1, 1.2.1.4]). $\mathcal{C}$ を安定 ∞-圏とする。 $\mathcal{C}$ 上の **t-structure** とは、$\mathcal{C}$ の replete な (i.e. 同型で閉じた) 充満部分圏の対 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ であって、次の条件をみたすもののことをいう。

(1) 任意の $X \in \mathcal{C}_{\geq 0}$ と $Y \in \mathcal{C}_{\leq 0}$ に対して $\mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(X, \Omega Y) = 0$.
(2) 包含 $\mathcal{C}_{\geq 0}[1] \subset \mathcal{C}_{\geq 0}$ と $\mathcal{C}_{\leq 0}[-1] \subset \mathcal{C}_{\leq 0}$ がある。
(3) 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して、$\mathcal{C}$ における fiber-cofiber sequence $X' \to X \to X''$ で、$X' \in \mathcal{C}_{\geq 0}$ かつ $X'' \in \mathcal{C}_{\leq 0}[-1]$ なるものが存在する。

以上の状況で、任意の整数 n に対し、部分圏 $\mathcal{C}_{\geq 0}[n]$ を $\mathcal{C}_{\geq n}$ と表し、部分圏 $\mathcal{C}_{\leq 0}[n]$ を $\mathcal{C}_{\leq n}$ と表す。

注意 1.1.3. 安定 ∞-圏 $\mathcal{C}$ に対して、そのホモトピー 1-圏 $h\mathcal{C}$ には自然に三角圏の構造が入る ([HA, 1.1.2.14]) のであった。 $\mathcal{C}$ 上の t-structure を与えることは、三角圏 $h\mathcal{C}$ 上の通常の意味での t-structure を与えることと等しい。

命題 1.1.4. ([HA, 1.2.1.5]). $\mathcal{C}$ を t-structure を備えた安定 ∞-圏とする。 このとき、任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathcal{C}_{\leq n}$ は $\mathcal{C}$ の反射的部分圏であり、$\mathcal{C}_{\geq n}$ は $\mathcal{C}$ の余反射的部分圏である。

定義 1.1.5. ([HA, 1.2.1.7]). 命題 1.1.4 により存在する包含 $\mathcal{C}_{\leq n} \subset \mathcal{C}$ の左随伴を $\tau_{\leq n}$ と表し、包含 $\mathcal{C}_{\geq n} \subset \mathcal{C}$ の右随伴を $\tau_{\geq n}$ と表す。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\leq n} \arrow[r, hook, shift right, "\mathrm{inc.}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "\tau_{\leq n}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_{\geq n} \arrow[r, hook, shift left, "\mathrm{inc.}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left, "\tau_{\geq n}"] \end{tikzcd}$$

1.2 導来 ∞-圏とその上の t-structure

定義 1.2.1. 以下、$\mathbb{Z}$ の導来 ∞-圏の定義を述べるが、この定義は本稿では一切用いない。

(1) $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ の充満部分圏 $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})^\circ$ を、対象 $A_* \in \mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ であって、$\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ における一意的な射 $A_* \to 0$ が、任意の quasi-isomorphism かつ level-wise に単射な射に対して RLP をもつようなもの全体のなすものとして定める。

(2) $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ を標準的な方法で dg-圏とみなし、同じく $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})^\circ$ はその dg-部分圏とみなす。

(3) $\mathbb{Z}$ の **導来 ∞-圏** $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ を、dg-nerve $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})^\circ)$ として定める ([HA, 1.3.5.8])。

命題 1.2.2. (導来 ∞-圏の基本性質).

(1) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は安定 ∞-圏である ([HA, 1.3.5.9])。

(2) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))$ の反射的部分圏である ([HA, 1.3.5.13])。

(3) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は presentable である ([HA, 1.3.5.21 (1)])。

1.2.3. 最後に、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 上の t-structure について述べる。 これは chain complex の homology がどこまで消えていないかによって定まるものである。

定義 1.2.4. 各整数 n に対して、

- $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))_{\geq n}$ を、 chain complex M_* で $\mathrm{H}_k(M) = 0$ $(k < n)$ なるもの全体のなす $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))$ の充満部分圏とする。
- 同様に、$\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))_{\leq n}$ を、 chain complex M_* で $\mathrm{H}_k(M) = 0$ $(k > n)$ なるもの全体のなす $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))$ の充満部分圏とする。
- そして、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq n} := \mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))_{\geq n} \cap \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ また $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\leq n} := \mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))_{\leq n} \cap \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ と定める。

命題 1.2.5. ([HA, 1.3.5.21 (2)]). $(\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}, \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\leq 0})$ は $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 上の t-structure を定める。

2 ordinary homology

2.1 ordinary homology 関手の定義

2.1.1. 命題 1.1.4 と 命題 1.2.5 より、colocalization

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0} \arrow[r, hook, shift left=1.5, "\mathrm{inc.}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \arrow[l, shift left=1.5, "\tau_{\geq 0}"] \end{tikzcd}$$

が存在するから、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の余完備性より $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ も余完備で、包含 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0} \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は余連続。

2.1.2. $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ は余完備だから、米田埋め込み よ $: * \to \mathcal{S}$ による制限は、圏同値

$$よ^* : \mathrm{Fun}^{\mathrm{cocts}}\big(\mathcal{S}, \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}\big) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$$

を誘導する（米田埋め込みに沿った左 Kan 拡張により得られる）。 $\mathbb{Z} \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ に対応する余連続関手を $H_{\mathbb{Z}} : \mathcal{S} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ とし、余連続関手 $H : \mathcal{S} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ を合成

$$\mathcal{S} \xrightarrow{H_{\mathbb{Z}}} \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0} \xhookrightarrow{\text{inc.}} \mathcal{D}(\mathbb{Z})$$

で定める。

2.1.3. 安定 ∞-圏のホモトピー 1-圏は additive だから、各整数 $n \geq 0$ に対し、関手

$$\mathrm{H}_n \ : \ \mathcal{S} \xrightarrow{H} \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Omega^n} \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{counit}} \mathrm{N}(\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},-)} \mathrm{N}(\mathrm{Ab})$$

が定まる。 具体的に書けば、各 $X \in \mathcal{S}$ に対し、

$$\mathrm{H}_n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}(\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z}))}(\mathbb{Z}, \Omega^n H(X)) \ \in \mathrm{Ab}$$

である。

2.2 ordinary homology 関手の性質

2.2.1. この節では、 2.1 節 で構成した関手 H_n が、ordinary homology に関する Eilenberg–Steenrod axiom に対応する性質をみたすことを示す。 ∞-圏で議論しているため、homotopy invariance は自明であることに注意する。 以下、dimension axiom, additivity, Mayer–Vietoris sequence, homology long exact sequence について述べる。

2.2.2. (dimension axiom). 2.1.2 で定義した関手 $H_{\mathbb{Z}}$ は 1 点空間 $* \in \mathcal{S}$ を $\mathbb{Z} \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ に送るのだった。 これより、

$$\mathrm{H}_0(*) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, H(*)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

である。

また、正整数 $n \geq 1$ に対しては $\Omega^n \mathbb{Z} \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\leq -n}$ だから、t-structure の定義より

$$\mathrm{H}_n(*) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Omega^n \mathbb{Z}) = 0$$

である。

2.2.3. (additivity). 集合 I で添字付けられた空間 $X_i \in \mathcal{S}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_n\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}\left(\mathbb{Z}, \Omega^n\left(H\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)\right)\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}\left(\mathbb{Z}, \Omega^n\left(\bigoplus_{i\in I} H(X_i)\right)\right) && (1)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}\left(\mathbb{Z}, \bigoplus_{i\in I} \Omega^n H(X_i)\right) && (2)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}\left(\mathbb{Z}, \operatorname*{colim}_{\substack{J\subset I\\ J:\text{ finite}}} \bigoplus_{j\in J} \Omega^n H(X_j)\right) && (3)\\
&\cong \operatorname*{colim}_{\substack{J\subset I\\ J:\text{ finite}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}\left(\mathbb{Z}, \bigoplus_{j\in J} \Omega^n H(X_j)\right) && (4)\\
&\cong \operatorname*{colim}_{\substack{J\subset I\\ J:\text{ finite}}} \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Omega^n H(X_j)) && (5)\\
&\cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Omega^n H(X_j))\\
&\cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{H}_n(X_j).
\end{aligned}
$$

ここで、

(1) H の余連続性から。

(2) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ において余直積と有限極限が交換することから。 一般に、任意の安定 ∞-圏において任意の small colimit と有限極限は交換する (命題 3.1)。

(3) 余直積が有限余直積の filtered colimit で表せることから [HTT, 4.2.3.11]。

(4) $\mathbb{Z}$ が $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の compact object であること (命題 3.2)、そして、$\tau_{\leq 0} : \mathcal{S} \to \mathrm{N(Set)}$ が small colimit を保つ [HTT, 5.5.6.18] ために、任意の ∞-圏 $\mathcal{C}$ において、もし $\operatorname{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \operatorname{colim}_i Y_i)$ なら $\operatorname{colim}_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, Y_i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, \operatorname{colim}_i Y_i)$ であることから。

(5) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の安定性から有限直積と有限直和が一致し [HA, 1.1.3.5]、かつそれにより $\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ が加法 1-圏となる [HA, 1.1.2.9] ことから。

2.2.4. (Mayer–Vietoris sequence). $\mathcal{S}$ における pushout

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

を考える。 これを H で移せば、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ における fiber-cofiber sequence

$$
\begin{tikzcd}
H(C) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \oplus H(B) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H(X)
\end{tikzcd}
$$

を得る。 繰り返し fiber をとることで、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ における fiber-cofiber sequence の列

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
\Omega^2 H(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega H(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Omega H(A) \oplus \Omega H(B) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega H(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & H(C) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \oplus H(B) \arrow[d] \\
 & & 0 \arrow[r] & H(X)
\end{tikzcd}
$$

を得る。 この図式に関手 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, -) : \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ab}$ を適用すれば、Ab における可換図式（の列）

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
\mathrm{H}_2(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_1(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_1(A) \oplus \mathrm{H}_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & \mathrm{H}_0(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_0(A) \oplus \mathrm{H}_0(B) \arrow[d] \\
 & & 0 \arrow[r] & \mathrm{H}_0(X)
\end{tikzcd}
$$

を得る。 これが完全列であることを示す。

証明. 上の可換図式から任意の四角を選び、その箇所において $\square \to \square \to \square$ という形の列が完全であることを見ればよい。 どこを選んでも、完全性の証明は以下で示すのと全く方法でできる（このことは以下の証明を見れば明らかである）。 そのため、ここでは列

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d] & \mathrm{H}_n(A) \oplus \mathrm{H}_n(B) \arrow[d, "j_n"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_n(X)
\end{tikzcd}
$$

について完全性を示す。

四角の可換性から $\mathrm{Im}(i_n) \subset \mathrm{Ker}(j_n)$ はよい。 $\mathrm{Ker}(j_n) \subset \mathrm{Im}(i_n)$ を示す。 任意の

$$\sigma \in \mathrm{H}_n(A) \oplus \mathrm{H}_n(B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Omega^n H(A) \oplus \Omega^n H(B))$$

で、$\mathrm{H}_n(X)$ において $j_n(\sigma) = 0$ となるものをとる。 $j_n(\sigma) = 0$ は、$\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \Omega^n H(A) \oplus \Omega^n H(B) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Omega^n X
\end{tikzcd}$$

があることを意味する。ここで、最初に選んだ四角は、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ における fiber-cofiber sequence

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n H(C) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^n H(A) \oplus \Omega^n H(B) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Omega^n X
\end{tikzcd}$$

を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, -)$ で移したものだった。この pullback の普遍性より、ある射 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Omega^n H(C))$ が存在して、$\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ において

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[dr, "\tau"] \arrow[drr, bend left, "\sigma"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \Omega^n H(C) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^n H(A) \oplus \Omega^n H(B) \arrow[d] \\
& 0 \arrow[r] & \Omega^n X
\end{tikzcd}$$

が可換となる。よって $\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ において $\sigma = i_n(\tau)$ であるから、$\sigma \in \mathrm{Im}(i_n)$ である。

最後に $\mathrm{H}_0(A) \oplus \mathrm{H}_0(B) \to \mathrm{H}_0(X) \to 0$ が完全であることを示す。$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ において fiber-cofiber sequence

$$\begin{tikzcd}
H(C) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \oplus H(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H(X) \arrow[r] & \Sigma H(C)
\end{tikzcd}$$

があるから、これを $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, -)$ で移せば、Ab における可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_0(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_0(A) \oplus \mathrm{H}_0(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_0(X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Sigma H(C))
\end{tikzcd}$$

を得る。上の議論と同様にして、右側の四角から 0 の除いてできる列

$$\mathrm{H}_0(A) \oplus \mathrm{H}_0(B) \longrightarrow \mathrm{H}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Sigma H(C))$$

が完全だとわかる。ここで、$H(C) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ だったから $\Sigma H(C) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 1}$ である。これを用いると、chain complex のなす dg-圏を通じた議論によって $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \Sigma H(C)) = 0$ が示せ（詳細は命題 3.3 を参照。筆者はより簡単な証明は知らない）、これにて証明が完了する。

> **注意 2.2.5.** 簡単にまとめると、空間の pushout から得られる $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の fiber-cofiber sequence を “上に” 伸ばしていき、 $\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, -)$ を適用すると図式の形と pullback 性から完全性がわか

> る。 また、"下に" 伸ばしていくと、$\pi_0\mathrm{Map}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, -)$ を適用したときそれは "π_{-1}" になり、$H(X)$ が負の情報を持たないことから、完全列の負の部分は消えることがわかる。

以上で、アーベル群の長完全列

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_2(X) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathrm{H}_1(C) \arrow[r] & \mathrm{H}_1(A) \oplus \mathrm{H}_1(B) \arrow[r] & \mathrm{H}_1(X) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathrm{H}_0(C) \arrow[r] & \mathrm{H}_0(A) \oplus \mathrm{H}_0(B) \arrow[r] & \mathrm{H}_0(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が得られた。 これが Mayer–Vietoris sequence である。

2.2.6. 上で得た Mayer–Vietoris sequence において、$B = *$ とすれば、ペア $C \to A$ に対する homology long exact sequence が得られ、$A = B = *$ とすれば、(unreduced) homology の懸垂同型 $\mathrm{H}_{n+1}(\Sigma C) \cong \mathrm{H}_n(C)$ $(n \geq 1)$ が得られる。

2.3 ordinary homology の計算例 (未完)

2.3.1. (n 次元球面). 2.2 節 で述べた内容を利用して、 ordinary homology の計算例を見る。

各整数 $n \geq 0$ に対して、 ***n* 次元球面** (n-dimensional sphere) $S^n \in \mathcal{S}$ を次のように帰納的に定義する。

- $S^0 := * \coprod * \in \mathcal{S}$ と定める。
- $S^n \in \mathcal{S}$ が定義できたら、$S^{n+1} \in \mathcal{S}$ を $S^{n+1} := \Sigma(S^n)$ として、すなわち、pushout

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
* \arrow[r] & S^{n+1}
\end{tikzcd}$$

  で定める。

2.3.2. (計算の概略). S^n の ordinary homology は 2.2 節 で述べた性質や圏論を用いて計算することができる。 当初は詳細に解説する予定であったが、一旦、概略だけを述べることとする。

まず、$\mathrm{H}_n(S^0)$ は additivity から直ちに計算できる。 S^1 以降は懸垂同型によって $n \geq 2$ での H_n は簡単に求まる。 一方、H_0 と H_1 を決定するには chain complex の考察が必要となる。 すなわち、完全列

$$0 \to \mathrm{H}_1(S^{n+1}) \to \mathrm{H}_0(S^n) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{H}_0(S^{n+1}) \to 0$$

の両端を決定するために、中央の射を決定したいが、そのために、帰納的に、 $\mathcal{S}$ における pushout

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

を 2.1.2 の関手 $H : \mathcal{S} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ で移して得られる biCartesian square

$$\begin{tikzcd} H(S^n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & H(S^{n+1}) \end{tikzcd}$$

の射 α の 0 次付近の部分を決定し、また、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ における cofiber を $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ における mapping cone を用いて具体的に表す [HA, 1.3.2.17] ことで $H(S^{n+1})$ の 0 次付近の情報を決定することとなる。

2.4 その他の事項について

2.4.1. $\mathcal{S}$ のモデルとして位相空間をとったときに、今回扱った ordinary homology が位相空間の ordinary homology とどう対応するかについては考えていません。

2.4.2. (積空間の homology). この枠組みで Künneth の定理は捉えられるでしょうか？ もし 2.1.2 における関手 $H_{\mathbb{Z}} : \mathcal{S} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ を symmetric monoidal にとれれば、Eilenberg–Zilber の定理の類似 $H_{\mathbb{Z}}(X \times Y) \simeq H_{\mathbb{Z}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\mathbb{Z}}(Y)$ が成り立つことになります。 これを用いれば [HA, 7.2.1.19] のスペクトル系列が $\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ において適用でき、古典的な Künneth スペクトル系列が得られそうです。

対称モノイダル閉表示可能圏とその間の対称モノイダル余連続関手全体のなす圏 $\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{L,smon}}$ を考えると、$\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{L,smon}}$ の始対象は空間のなす圏 $\mathcal{S}$ にモノイダル積を直積で、unit を $*$ で定めた対称モノイダル圏になります（[Gro10] の Proposition 5.32 の直後の記述を参照）。 したがって、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ が対称モノイダル閉表示可能圏であれば、対象 $\mathbb{Z} \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ から対称モノイダル余連続関手 $H_{\mathbb{Z}} : \mathcal{S} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ が定まります。

$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ には chain complex のテンソル積から定まる対称モノイダル構造が入ります [HA, 7.1.2.12]。さらに、そのモノイダル積はそれぞれの引数について small colimit を保ちます（ **要出典** ）。 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Mod}_{H\mathbb{Z}}$ [HA, 7.1.1.16] と [HA, 7.1.1.13 (1)] より、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ は $\mathbb{Z}$ を含み small colimit で閉じた最小の $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の充満部分圏であるため、[HA, 7.1.1.7] の証明と同様にして、$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の対称モノイダル構造が $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ に制限されることがわかります。 また、[HA, 1.3.5.21] と [HA, 1.4.4.12, 1.4.4.13] より $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0}$ は presentable であるため、以上より $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 0} \in \mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{L,smon}}$ です。

3 ∞-圏論に関する補足

命題 3.1. $\mathcal{C}$ を安定圏、K を simplicial set とし、$\mathcal{C}$ が任意の K-indexed colimit をもつとする。このとき、$\mathrm{colim} : \mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は有限極限を保つ。

証明. pointwise に考えることで、$\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})$ も安定圏であることがわかる [HA, 1.1.3.1]。 余極限同士は交換するから、$\mathrm{colim} : \mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は右完全である。 よって [HA, 1.1.4.1] より $\mathrm{colim} : \mathrm{Fun}(K, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ は左完全である。

命題 3.2. $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ の ω-compact object は、perfect complex (i.e. 有限生成射影加群からなる bounded complex と quasi-isomorphic な chain complex) とちょうど一致する。

証明. [HA, 1.4.4.1 (3)] より、任意の余完備な安定 ∞-圏 $\mathcal{C}$ に対して、$X \in \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の ω-compact object であることと、X が三角圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における compact object であること、すなわち $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, -) : \mathrm{h}\mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ が任意個の直和を保つこととは同値である。 $\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は古典的な $\mathbb{Z}$ の導来圏 $D(\mathbb{Z})$ と一致することが知られており、また、$D(\mathbb{Z})$ における compact object はちょうど perfect complex と一致することが知られている (例えば Stacks Project の Tag 07LT (web ページへのリンク) を参照)。

命題 3.3. 任意の正整数 $n \geq 1$ と $M \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq n}$ に対して、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M) = 0$.

証明. $n \geq 1$ より $\mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq n} \subset \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 1}$ だから、$n = 1$ の場合に示せばよい。 $M \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 1}$ とする。 [HA, 1.3.2.21] の証明と同様な論法を用いて主張を示す。

(1) $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{N_{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))$ の充満部分圏だから、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{N_{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))}(\mathbb{Z}, M)$. また、$\mathrm{N_{dg}}(\mathrm{Ch}(\mathbb{Z}))$ の homotopy category は dg-category $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ の homotopy category (定義は例えば [HA, 1.3.1.5] を参照) と同値だから [HA, 1.3.1.11]、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{D}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{hCh}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M)$$

である。

(2) dg-category の homotopy category の定義から、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{hCh}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M) = \mathrm{H}_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M)_*\right)$$

となる。 ここで、 $\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M)_* \in \mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ の internal-hom である。

(3) $M \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})_{\geq 1}$ より $\mathrm{H}_k(M) = 0$ $(k < 1)$ である。 よって、Ab における可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\left(M_1 \xrightarrow{d} M_0\right) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "d"] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

で定まる chain complex の射を $f : N_* \to M_*$ とするとこれは quasi-isomorphism となる。 ここで、N_* は $n \geq 2$ では M と同じで、$n \leq 0$ では 0 のみからなる。

(4) $\mathbb{Z} \in \mathrm{Ab}$ は projective だから、[HA, 1.3.2.20] より、 f との合成から誘導される chain complex の射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, N_*)_* \to \mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M_*)_*$$

は quasi-isomorphism である。 また、N_* の定義より $\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, N_*)_0 = 0$ だから、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{hCh}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M) = \mathrm{H}_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, M)_*\right) \cong \mathrm{H}_0\left(\mathrm{Map}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, N_*)_*\right) = 0$$

である。

参考文献

[Gro10] Moritz Groth, “A short course on ∞-categories”, arxiv:1007.2925, https://arxiv.org/abs/1007.2925.

[HTT] Jacob Lurie, “Higher Topos Theory”, Princeton University Press, 2009. also available at https://www.math.ias.edu/~lurie/.

[HA] Jacob Lurie, “Higher Algebra”, preprint, available at https://www.math.ias.edu/~lurie/.

[MOF] “Homology theory constructed in a homotopy-invariant way”, MathOverflow, https://mathoverflow.net/questions/78450/homology-theory-constructed-in-a-homotopy-invariant-way.