任意の順序数 α に対し、ある（被約な）アーベル p 群 G が存在し、G が “p で α 回割り切れる” 0 でない元をもつ

るめなる (@Re1yra)

目次

1. はじめに

本文書の目標は、タイトルの命題（を適切に修正したもの）を示すことです。 まず、順序数 α に対し「p で α 回割り切れる 0 でない元が存在する」ことの正確な意味は明らかではないため、 2 節 の最初でその正当化について述べます。それを通じて、考える問題をより洗練された形に変更します（分かる方向けに説明すれば、Prüfer p 群のような可除群のケースを省きたい、ということです）。 詳細は 2.6 以降で説明します。そして、その修正した問題への解答を 3 節 で紹介します。

全体を通して、順序数の定義と超限帰納法を用いた証明や定義の知識を仮定します。また、証明の理解に必要な知識は 3 節 の冒頭に記載しました。

2 節 の 補題 2.11 と 命題 2.12 は共立出版『復刊 アーベル群・代数群』(1999) 内の本田欣也『アーベル群』の 4 章を参考にしました。 また、 3 節 の内容は、László Fuchs, “Abelian Groups”, Springer Monographs in Mathematics (2015) の 10.1 節の Theorem 1.6 の証明の細部を補完したものになります。

2. 準備と導入

この節では、素数 p とアーベル p 群 G を固定します。

2.1: 初めに、順序数 α に対して「p で α 回割り切れる 0 でない G の元が存在する」ことを定式化しましょう。 まず、1 以上の整数 n に対して、「p で n 回割り切れる 0 でない G の元が存在する」ことは、$p^n G \neq 0$ と言い換えられます。 そこで、

1. 順序数 α に対して G の部分群 $p^\alpha G$ を定義し、
2. $p^\alpha G \neq 0$ であるときに「p で α 回割り切れる 0 でない G の元が存在する」という

ことにしましょう。

2.2: 任意の順序数 α に対して、G の部分群 $p^\alpha G$ を定義します。 これは、0 以上の整数 n に対する部分群 $p^n G$ を任意の順序数に対して拡張したもので、想像がつくかもしれませんが、超限帰納法により定義されます。

定義 2.3: 各順序数 α に対して G の部分群 $p^\alpha G$ を、次のような超限帰納で定義する：

- $p^0 G := G$ と定める。
- $p^{\alpha+1} G := p(p^\alpha G)$ と定める。

- γ が極限順序数のとき、$p^\gamma G := \bigcap_{\alpha<\gamma} p^\alpha G$ と定める。

以上の構成は、G の部分群の降下列を定めます：

$$\cdots \subset p^\alpha G \subset \cdots \subset p^{n+1}G \subset p^n G \subset \cdots \subset pG \subset G.$$

先に進む前に、感覚をつかむため、この列がどのような形になるか例を 2 つ計算してみましょう：

例 2.4: n を 1 以上の整数とすると、$G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ はアーベル p 群である。 各 $0 \le k \le n$ に対して $p^k G = p^k\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ であり、特に $p^n G = 0$ である。 よって、降下列は $\alpha = n$ でストップする。

$$0 = p^n G \subsetneq p^{n-1}G \subsetneq \cdots \subsetneq pG \subsetneq G.$$

例 2.5: $G = \bigoplus_{n\ge1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ はアーベル p 群である。 1 以上の整数 k に対して $p^k G = \bigoplus_{n\ge k+1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (\ne 0)$ が成り立ち、これより $p^\omega G = 0$ となる。 よって、降下列は $\alpha = \omega$ でストップする。

$$0 = p^\omega G \subsetneq \cdots \subsetneq p^n G \subsetneq \cdots \subsetneq pG \subsetneq G.$$

2.6: 以上の定義により、「p で α 回割り切れる 0 でない G の元が存在する」ことを $p^\alpha G \ne 0$ として正確に表現することができたわけですが、実は本文書において興味があるのは、

問題 A 任意の順序数 α に対して、あるアーベル p 群 G が存在して、$p^\alpha G \ne 0$ となるか？

というタイトルの問題をそのまま定式化した問い**よりかは**、

問題 B 任意の順序数 α に対して、あるアーベル群 p 群 G が存在して、$p^{\beta+1}G = p^\beta G$ なる順序数 β のうち最小のものが α となるか？

という問いです。 問題 B はすなわち、「与えられた α に対して、降下列

$$\cdots \subset p^\alpha G \subset \cdots \subset p^{n+1}G \subset p^n G \subset \cdots \subset pG \subset G$$

が "最初にストップする場所" が α となるような G があるか？」という問題です。 ここで、

- 「一旦ストップしたら、それ以降は部分群が変化しない (ある α があって $p^{\alpha+1}G = p^\alpha G$ が成り立てば、任意の $\alpha' \ge \alpha$ に対して $p^{\alpha'}G = p^\alpha G$ となる)」(補題 2.11) ことと、
- 「どんな G に対しても必ずどこかでストップする (ある α があって $p^{\alpha+1}G = p^\alpha G$ となる)」 (命題 2.12)

ことを後で示します。 そのため問題 B は意味をなします。 また、"最初にストップする場所" を示す順序数、すなわち順序数 $\min\{\beta \mid p^{\beta+1}G = p^\beta G\}$ は G の (p に関する) **長さ** (length) と呼ばれます。

2.7: ではなぜ問題 A よりも問題 B に興味があるのでしょうか？ それは、問題 A がある意味で "自明な" 解をもつためです。 具体的には、

1. G が $pG = G$ をみたせば、任意の順序数 α に対して $p^\alpha G = G$ なることが示せる (補題 2.11)。 特にこのとき、任意の α に対して $p^\alpha G \ne 0$ となる（つまり 1 つの G が任意の α に対して問題 A の解となる)。
2. そして、$pG = G$ なるアーベル p 群として有名な例が存在する：

例 2.8: $\mathbb{Z}(p^\infty) := \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]/\mathbb{Z}$ とおき、これを **Prüfer p 群** (Prüfer p-group) と呼ぶ。 ここで、$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ は環 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cong \mathbb{Z}[x]/(px-1)$ を加法によりアーベル群とみなしたものを表す。 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ は集合として

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{n}{p^e} \;\middle|\; e \in \mathbb{Z}_{>0},\ n \in \mathbb{Z},\ p \nmid n,\ n < p^e \right\}$$

と表せる。 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ において $p^e \cdot \frac{n}{p^e} = n = 0$ だから、$\mathbb{Z}(p^\infty)$ は p 群である。 また、$\frac{n}{p^e} = p \cdot \frac{n}{p^{e+1}}$ だから、$p\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ が成り立つ。

ここで、$pG = G$ なる G は長さ 0 です (すなわち降下列 $(p^\alpha G)_\alpha$ が $\alpha = 0$ でストップする)。 そのため、このような G は、問題 B に対しては $\alpha = 0$ の場合の解答を与えるのみです。 よって、興味はタイトルの「p で α 回割り切れる元をもつ G があるか？」から、降下列 $(p^\alpha G)_\alpha$ に関する次の問題へと移り変わります：

主題 (問題 B) 任意の順序数 α に対して、長さが α であるようなアーベル p 群 G が存在するか？

2.9: 先に進む前に、これまで見てきた長さの例をまとめておきましょう：

1. 長さ 0 のアーベル p 群：$pG = G$ なる G。特に Prüfer p 群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (例 2.8)。
2. 長さ $n \geq 1$ のアーベル群 p 群：p^n 次巡回群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (例 2.4)。
3. 長さ ω のアーベル p 群：直和 $\bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (例 2.5)。

では、例えば長さ $\omega + 1$ のアーベル p 群は作れるでしょうか？ 上記の例の群を単に直和するだけではうまくいかなさそうです。一旦ここで立ち止まって、少し考えてみるのも面白いかもしれません (私は全然思いつきませんでした)。

2.10 (諸命題の証明): 以降、次節 (3 節) に進むまでは補足的な事項を述べます。 ここでは、段落 2.6 において問題 B や長さの正当化に用いた 2 命題の証明を行います。 まずは、降下列 $(p^\alpha G)_\alpha$ が一旦どこかで "停留" すれば、実はその箇所より下はすべて同じである、ということを示しましょう。

補題 2.11: ある順序数 α が存在して $p^{\alpha+1}G = p^\alpha G$ が成り立つとする。このとき、任意の順序数 $\alpha' \geq \alpha$ に対して $p^{\alpha'}G = p^\alpha G$ が成り立つ。

証明: $p^{\alpha'}G \subset p^\alpha G$ であることは明らかだから、逆の包含 $p^\alpha G \subset p^{\alpha'}G$ を示せばよい。 ある順序数 β が一意的に存在して $\alpha' = \alpha + \beta$ が成り立つから、任意の順序数 β に対して $p^\alpha G \subset p^{\alpha+\beta}G$ であればよい。 これを β に関する超限帰納法で示す。
($\beta = 0$ の場合) これは明らか。
($\beta \Rightarrow \beta + 1$) $p^\alpha G \subset p^{\alpha+\beta}G$ と仮定し、$p^\alpha G \subset p^{\alpha+\beta+1}G$ を示す。

1. $x \in p^\alpha G$ とする。 補題の仮定 $p^\alpha G \subset p^{\alpha+1}G$ より、ある $y \in p^\alpha G$ が存在して $x = py$ が成り立つ。
2. 帰納法の仮定 $p^\alpha G \subset p^{\alpha+\beta}G$ より $y \in p^{\alpha+\beta}G$ である。 よって $x \in p\left(p^{\alpha+\beta}G\right) = p^{\alpha+\beta+1}G$ である。

(極限順序数 γ の場合) 各 $\beta < \gamma$ に対し $p^\alpha G \subset p^{\alpha+\beta}G$ と仮定すれば、$p^\alpha G \subset \bigcap_{\beta<\gamma} p^{\alpha+\beta}G = p^{\alpha+\gamma}G$ である。 □

そして、列が実際にどこかで "停留" することを示しましょう。

命題 2.12: ある順序数 α が存在して、$p^{\alpha+1}G = p^{\alpha}G$ が成り立つ。

証明: 任意の順序数 α に対して $p^{\alpha+1}G \subsetneq p^{\alpha}G$ であると仮定する。 $\alpha > |G|$ なる順序数 α を任意にとる。 このとき仮定より、任意の順序数 $\beta < \alpha$ に対して $p^{\beta+1}G \neq p^{\beta}G$ が成り立つ。 よって、各 $\beta < \alpha$ に対して元 $g_\beta \in p^{\beta}G \setminus p^{\beta+1}G$ が存在する。 このとり方より、各 $g_\beta \in G$ は互いに異なるから、

$$|\{g_\beta \mid \beta < \alpha\}| = \alpha > |G|$$

となり矛盾する。 □

2.13 (長さ 0 のアーベル p 群): 段落 2.8 において、$pG = G$ なるアーベル p 群の長さが 0 であり、このとき任意の順序数 α に対して $p^{\alpha}G = G \neq 0$ であることを見ました。 ここでは、アーベル p 群 G に対して、$pG = G$ であることと G が**可除**であることが同値だと示します。

一般に、アーベル群 H が**可除** (divisible) であるとは、任意の 1 以上の整数 n に対して $nH = H$ が成り立つことをいいます。 このとき特に $pH = H$ が成り立つため、アーベル p 群 G が可除なら $pG = G$ です。アーベル p 群に対しては逆が成り立つことを示しましょう。

証明: G をアーベル p 群とし、$pG = G$ が成り立つと仮定する。 n を 1 以上の整数とし、$G \subset nG$ が成り立つことを示す。 $x \in G$ とし、x の位数が p^e $(e > 0)$ であるとする。
(i) n が p で割り切れない場合 : このとき、n は環 $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ における単元を定めるから、ある $m \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ が存在して、$\mathbb{Z}$ において $mn = qp^e + 1$ が成り立つ。 すると、

$$n(mx) = (qp^e + 1)x = q(p^e x) + x = x$$

より $x \in nG$ が分かる。
(ii) n が p で割り切れる場合 : このとき、ある p で割り切れない整数 n' と 1 以上の整数 k が存在して $n = n'p^k$ が成り立つ。 仮定 $G \subset pG$ より、ある $y \in G$ が存在して $x = p^k y$ となる。 (i) より、ある $z \in G$ が存在して $y = n'z$ が成り立つから、$x = p^k y = n'p^k z = nz$ となり $x \in nG$ である。 □

0 以外の可除部分群を含まないアーベル群を**被約** (reduced) アーベル群といいます。以上の事項を述べた理由は次の通りです :

1. 可除アーベル群の構造は完全に決定されています。 具体的には、(いくつかの素数に対する) Prüfer p 群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ と $\mathbb{Q}$ の加法群の直和の形に一意的にかけることが知られています。特に、任意の可除アーベル p 群はある集合 I により $\mathbb{Z}(p^\infty)^{\oplus I}$ と表せます。 ゆえに、以上の話と合わせれば、**長さ 0 のアーベル p 群が $\mathbb{Z}(p^\infty)^{\oplus I}$ の形でちょうど尽くされていることが分かります。**
2. 任意のアーベル群 G に対して、ある可除部分群 D と被約部分群 R が一意的に存在して、$G \cong D \oplus R$ となります。 このとき、D の p に関する長さが 0 であることから、G の p に関する長さと R の p に関する長さが一致します。 被約アーベル p 群 H に対して、H の長さを λ とすると、$p^\lambda H$ は $p(p^\lambda H) = p^\lambda H$ をみたすため可除部分群となり、H が被約なことから $p^\lambda H = 0$ です。 長さの定義より、各 $\alpha < \lambda$ に対しては $p^\alpha H \neq 0$ となるため、被約アーベル p 群 H に対しては、その長さは $\min\{\beta \mid p^\beta H = 0\}$ と等しいことがわかります。 よって、**被約アーベル p 群に制限すれば問題 A も非自明であり、問題 B が分かれば問題 A も分かり、問題 A が分かれば問題 B の部分解 (与えられた α に対して、長さが α 以上となる被約アーベル p 群が存在すること) が得られます。**

3. 証明

3.1: 本節の目的は、段落 2.8 の最後で述べた、

任意の順序数 α に対して、長さが α であるようなアーベル p 群 G が存在するか？

という問題への肯定的な解答を紹介することです。すなわち、各順序数 α に対して、長さが α であるようなアーベル p 群 H_α を構成します。

3.2: 構成手順の概要を述べます。手法としては、超限帰納法を用います。1 以上の整数 n の場合は $H_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とすればよいです。また、$H_\omega := \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とします。実は、一般の極限順序数 γ に対して $H_\gamma := \bigoplus_{\beta<\gamma} H_\beta$ とすればよいことが比較的単純に分かります (後で示します)。

非自明となるのは α が後続順序数の場合です。ここでは、α がある極限順序数 γ と 1 以上の整数 (有限順序数) を用いて $\alpha = \gamma + n$ と表せること (補題 3.4) を利用し、$n \geq 1$ に関する帰納法を用いて構成します。

$n = 1$ の場合の構成には、アーベル群の圏における **pushout** (押し出し, ファイバー和, ファイバー余積などとも呼ばれる) の構成を使用します。また、帰納法のステップ ($n \Rightarrow n+1$) では Ext 関手の定義とそれが誘導する長完全列、そして拡大類と Ext^1 の元の間の対応を用います。

3.3: 証明の前に、使用する補題を並べておくこととします。必要が生じてから補題を見る場合には 3.8 へ進んでください。

補題 3.4: α を後続順序数とする。このとき、ある極限順序数 γ と 1 以上の有限順序数 n が存在して $\alpha = \gamma + n$ が成り立つ。ここで、0 は極限順序数に含めるとする。

証明: α が後続順序数だから、ある順序数 β が存在して $\alpha = \beta + 1$ と一意的に表せる。この β に関する超限帰納法で示す。

($\beta = 0$ の場合) 0 が極限順序数だから $\alpha = 0 + 1$ より成り立つ。

($\beta \Rightarrow \beta + 1$) ある極限順序数 γ と 1 以上の有限順序数 n が存在して $\beta + 1 = \gamma + n$ が成り立つとする。このとき、$(\beta + 1) + 1 = (\gamma + n) + 1 = \gamma + (n + 1)$ である。

(極限順序数 γ の場合) このときすでに $\alpha = \gamma + 1$ と表せているからよい。 □

補題 3.5: I を集合とし、各 $i \in I$ に対してアーベル群の列 $\left(H^i_\beta\right)_{\beta<\alpha}$ で、任意の $\beta < \beta' < \alpha$ に対して $H^i_{\beta'} \subset H^i_\beta$ なるものが与えられているとする。このとき、

$$\bigcap_{\beta<\alpha} \bigoplus_{i\in I} H^i_\beta = \bigoplus_{i\in I} \bigcap_{\beta<\alpha} H^i_\beta$$

が成り立つ。

証明: ($\subset$ 側) $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} \bigoplus_{i\in I} H^i_\beta$ とする。

1. このとき $x \in \bigoplus_{i\in I} H^i_0$ だから、ある有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $x = \sum_{j\in J} x_j \left(x_j \in H^j_0\right)$ が成り立つ。

2. $j \in J$ とする。 いま任意の $\beta < \alpha$ に対して $x \in \bigoplus_{i \in I} H^i_\beta$ かつ $H^j_\beta \subset H^j_0$ だから、任意の $\beta < \alpha$ に対して $x_j \in H^j_\beta$ である。 すなわち、$x_j \in \bigcap_{\beta < \alpha} H^j_\beta$ である。
3. 以上より $x \in \bigoplus_{i \in I} \bigcap_{\beta < \alpha} H^i_\beta$ である。

($\supset$ 側) $x \in \bigoplus_{i \in I} \bigcap_{\beta < \alpha} H^i_\beta$ とする。 このとき、ある有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $x = \sum_{j \in J} x_j \left(x_j \in \bigcap_{\beta < \alpha} H^j_\beta\right)$ が成り立つ。$\beta < \alpha$ とすると、任意の $j \in J$ に対して $x_j \in H^j_\beta$ だから、$x \in \bigoplus_{i \in I} H^i_\beta$ である。以上より $x \in \bigcap_{\beta < \alpha} \bigoplus_{i \in I} H^i_\beta$ である。 □

補題 3.6: $\{H_i\}_{i \in I}$ をアーベル群の族とする。 このとき、任意の順序数 α に対して次の等式が成り立つ。

$$p^\alpha \bigoplus_{i \in I} H_i = \bigoplus_{i \in I} p^\alpha H_i.$$

証明: α に関する超限帰納法で示す。

($\alpha = 0$ の場合) 明らか。

($\alpha \Rightarrow \alpha + 1$) α について成り立つと仮定し、$\alpha + 1$ について成り立つことを示す。 左辺を変形すると、

$$p^{\alpha+1} \bigoplus_{i \in I} H_i = p\left(p^\alpha \bigoplus_{i \in I} H_i\right) = p\left(\bigoplus_{i \in I} p^\alpha H_i\right)$$

となるから、$\alpha = 1$ の場合に示せばよいことが分かる。

($\alpha = 1$ の場合) この場合は、2 方向の集合としての包含を直接的に示す。

($\subset$ 側) $x \in p \bigoplus_{i \in I} H_i$ とする。 ある $y \in \bigoplus_{i \in I} H_i$ が存在して $x = py$ が成り立つ。 ある有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $y = \sum_{j \in J} y_j$ $(y_j \in H_j)$ が成り立つ。 よって $x = \sum_{j \in J} py_j$ だから $x \in \bigoplus_{i \in I} pH_i$ である。

($\supset$ 側) $x \in \bigoplus_{i \in I} pH_i$ とする。 ある有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $x = \sum_{j \in J} x_j$ $(x_j \in pH_j)$ が成り立つ。すると各 $j \in J$ に対して、ある $y_j \in H_j$ が存在して $x_j = py_j$ が成り立つから、$x = p\sum_{j \in J} y_j$ となり、$x \in p \bigoplus_{i \in I} H_i$ である。

(極限順序数 γ の場合) 任意の $\alpha < \gamma$ に対して成り立つと仮定する。 このとき、

$$p^\gamma \bigoplus_{i \in I} H_i = \bigcap_{\alpha < \gamma} \left(p^\alpha \bigoplus_{i \in I} H_i\right) = \bigcap_{\alpha < \gamma} \bigoplus_{i \in I} p^\alpha H_i = \bigoplus_{i \in I} \bigcap_{\alpha < \gamma} p^\alpha H_i = \bigoplus_{i \in I} p^\gamma H_i$$

となる。 ここで、3 つ目の等号は 補題 3.5 による。 □

補題 3.7: G_1, G_2 をアーベル群、$f : G_1 \to G_2$ をアーベル群の準同型とする。 このとき、任意の順序数 α に対して $f(p^\alpha G_1) \subset p^\alpha G_2$ が成り立つ。

証明: α に関する超限帰納法で示す。

($\alpha = 0$ の場合) 明らか。

$(\alpha \Rightarrow \alpha+1)$ α について成り立つと仮定する。$x \in p^{\alpha+1}G_1$ なら、ある $y \in p^{\alpha}G_1$ が存在して $x = py$ が成り立つ。よって $f(x) = pf(y) \in p(p^{\alpha}G_2) = p^{\alpha+1}G_2$ となる。
(極限順序数 γ の場合) 任意の $\alpha < \gamma$ に対して成り立つと仮定する。このとき、$x \in p^{\gamma}G_1$ なら、任意の $\alpha < \gamma$ に対して $x \in p^{\alpha}G_1$ であり、仮定から $f(x) \in p^{\alpha}G_2$ となるから、$f(x) \in \bigcap_{\alpha<\gamma} p^{\alpha}G_2 = p^{\gamma}G_2$ が成り立つ。 □

3.8: それでは、主題の定理「任意の順序数 α に対して、長さが α であるようなアーベル p 群 H_α が存在する」を示しましょう。

証明: 任意の順序数 $\alpha \geq \omega$ に対して、次の 2 条件をみたすアーベル p 群 H_α を α に関する超限帰納法により構成する。

(a) H_α は長さ α であり、$p^{\alpha}H_\alpha = 0$[(1)] が成り立つ。
(b) $p^{\alpha}H_{\alpha+1}$ は p 次巡回群であり、$H_{\alpha+1}/p^{\alpha}H_{\alpha+1} \cong H_\alpha$ が成り立つ。

ここで、条件 (b) は α が後続順序数の場合の構成に用いるためのものである。
(最初の場合) $H_\omega := \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と定めれば、前に見たように H_ω は長さ ω である。
(極限順序数 γ の場合) 各 $\alpha < \gamma$ に対して上記の (a) と(b) をみたすような H_α が定まっているとする。$H_\gamma := \bigoplus_{\alpha<\gamma} H_\alpha$ とおくと、H_γ はアーベル p 群である。以下、H_γ が長さ γ であることを示す。

証明: $p^{\gamma}H_\gamma = 0$ かつ任意の $\beta < \gamma$ に対して $p^{\beta}H_\gamma \neq 0$ であることを示せば十分である。これらはともに 補題 3.6 と帰納法の仮定よりしたがう。実際、前者は

$$p^{\gamma}H_\gamma = \bigoplus_{\alpha<\gamma} p^{\gamma}H_\alpha = 0$$

より成り立ち、後者は、$\beta < \gamma$ に対し

$$p^{\beta}H_\gamma = \bigoplus_{\alpha<\gamma} p^{\beta}H_\alpha = \bigoplus_{\beta<\alpha<\gamma} p^{\beta}H_\alpha$$

であり、γ が極限順序数だから $\beta < \alpha < \gamma$ なる順序数 α が存在するため、$p^{\beta}H_\gamma \neq 0$ が分かる。□

(α が後続順序数の場合) 補題 3.4 より、ある極限順序数 γ と 1 以上の有限順序数 n が存在して $\alpha = \gamma + n$ と表せる。これを用いて、n に関する帰納法により $H_{\gamma+n}$ を構成する。この帰納法においては、任意の順序数 $\alpha \leq \gamma$ について H_α が構成できていると仮定した上で、次の条件を仮定に加える。

(c) $p^{\gamma}H_{\gamma+n} \subset H_{\gamma+n}$ が p^n 次巡回群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と同型かつ $H_{\gamma+n}/p^{\gamma}H_{\gamma+n} \cong H_\gamma$ が成り立つ。

$n = 1$ の場合

1. γ は極限順序数だから、条件 (b) の後半を用いると、

$$H_\gamma = \bigoplus_{\alpha<\gamma} H_\alpha \cong \bigoplus_{\alpha<\gamma} H_{\alpha+1}/p^{\alpha}H_{\alpha+1} \cong \left(\bigoplus_{\alpha<\gamma} H_{\alpha+1}\right) \Big/ \left(\bigoplus_{\alpha<\gamma} p^{\alpha}H_{\alpha+1}\right)$$

   が成り立つ。
2. 条件 (b) の前半より、各 $\alpha < \gamma$ に対し $p^{\alpha}H_{\alpha+1}$ は p 次巡回群だから、アーベル群の同型写像 $p^{\alpha}H_{\alpha+1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が存在する。このとき、余直積（直和）の普遍性よりアーベル群の準同型 $\nabla : \bigoplus_{\alpha<\gamma} p^{\alpha}H_{\alpha+1} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が得られる。この ∇ を用いて、次の pushout によりアーベル群 $H_{\gamma+1}$ を定める。

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha<\gamma} p^\alpha H_{\alpha+1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\nabla"'] & \bigoplus_{\alpha<\gamma} H_{\alpha+1} \arrow[d, "\delta"] \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, hook, "j"] & H_{\gamma+1}
\end{tikzcd}$$

ここで、アーベル群の圏において全射と単射の pushout はまたそれぞれ全射と単射になるから、δ は全射、j は単射になる（後者は少し非自明だが、省略する）。また、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と $\bigoplus_{\alpha<\gamma} H_{\alpha+1}$ がともに p 群だから、$H_{\gamma+1}$ も p 群である。

3. $C_1 := \mathrm{Im}(j)$ とおくと、C_1 は p 次巡回群であり、可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{\alpha<\gamma} p^\alpha H_{\alpha+1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\nabla"'] & \bigoplus_{\alpha<\gamma} H_{\alpha+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta"] & H_\gamma \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, hook, "j"] & H_{\gamma+1} \arrow[r, two heads] & H_{\gamma+1}/C_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで、上と下の 2 行はそれぞれ短完全列である。また、一番右の縦の射は cokernel の普遍性から得られる写像であり、これは次の補題により同型写像である。

補題 3.9: 次のアーベル群の可換図式において、上と下の 2 行がそれぞれ短完全列であるとする。このとき、左側の四角が pushout なら、γ は同型写像である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, "\alpha"'] & A_2 \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, two heads, "\beta"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, hook, "j"] & B_2 \arrow[r, two heads, "f"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

証明: γ が全射であることは右側の四角の可換性から分かる。γ が単射であることを示す。蛇の補題と α の全射性より、短完全列

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{i} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{e} \mathrm{Ker}(\gamma) \to 0$$

を得る。$\mathrm{Ker}(\gamma) = 0$ を示したいから、i が誘導する写像 $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ が全射であることを示せばよい。

$x \in \mathrm{Ker}(\beta)$ とする。左側の四角が pushout であるということは、$B_2 \cong (B_1 \oplus A_2)/\langle \alpha(z) - i(z) \mid z \in A_1 \rangle$ とかける。よって、$\beta(x) = 0$ は、ある $z \in A_1$ が存在して $B_1 \oplus A_2$ において

$$x = \alpha(z) - i(z) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(-z) + (x + i(z)) = 0$$

が成り立つことを意味する。これより $\alpha(-z) = 0$ かつ $x = i(-z)$ だから、$y := -z \in A_1$ とおけば、$y \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ かつ $x = i(y)$ となり、$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ が全射だと分かる。 □

4. 最後に $C_1 = p^\gamma H_{\gamma+1}$ (条件 (c) 前半) を示す。そうすれば、$p^{\gamma+1} H_{\gamma+1} = pC_1 = 0$ (条件 (a)) と $H_{\gamma+1}/p^\gamma H_{\gamma+1} = H_{\gamma+1}/C_1 \cong H_\gamma$ (条件 (b) = 条件 (c) 後半) が分かる。

証明: ($\subset$ 側) $x \in C_1$ とする。任意の $\beta < \gamma$ に対して $x \in p^\beta H_{\gamma+1}$ であることを超限帰納法で示す。

($\beta = 0$ の場合) 明らか。

($\beta \Rightarrow \beta+1$) $x \in p^\beta H_{\gamma+1}$ を仮定する。いま $p^{\beta+1} H_{\beta+2} \cong C$ だから、∇ の定義より、ある $x' \in p^{\beta+1} H_{\beta+2}$ が存在して $x = j(\nabla(x'))$ が成り立つ。$H_{\beta+2}$ において、ある $x'' \in p^\beta H_{\beta+2}$ が存在して $x' = px''$ が成り立つから、

$$x = j(\nabla(x')) = \delta(i(x')) = p\delta(x'')$$

となる。補題 3.7 より $\delta(x'') \in p^\beta H_{\gamma+1}$ だから、$x \in p^{\beta+1} H_{\gamma+1}$ が成り立つ。

(極限順序数 β の場合) β を極限順序数とし、任意の $\beta' < \beta$ に対して $x \in p^{\beta'} H_{\gamma+1}$ であると仮定すると、$p^\beta H_{\gamma+1}$ の定義より $x \in \bigcap_{\beta' < \beta} p^{\beta'} H_{\gamma+1} = p^\beta H_{\gamma+1}$ となる。

($\supset$ 側) $x \in p^\gamma H_{\gamma+1}$ とする。$\pi : H_{\gamma+1} \to H_{\gamma+1}/C_1$ を射影とすると、$\pi(x) = 0$ を示せばよい。合成写像 $H_{\gamma+1} \xrightarrow{\pi} H_{\gamma+1}/C_1 \cong H_\gamma$ を考えると、補題 3.7 よりこの合成写像による $p^\gamma H_{\gamma+1}$ の像は $p^\gamma H_\gamma = 0$ である。よって $\pi(x) = 0$ となる。 □

$n \Rightarrow n+1$ のステップ

1. $H_{\gamma+n}$ が構成できたと仮定して、$H_{\gamma+n+1}$ を構成する。条件 (c) 前半より、$C_n := p^\gamma H_{\gamma+n}$ は p^n 次巡回群と同型だから、$\bmod p^n$ により定まる全射を $\pi : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to C_n$ とすると、(アーベル群の) 短完全列

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} C_n \to 0$$

を得る。

2. 上の短完全列に関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_\gamma, -) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ を適用すると、右導来関手の長完全列を考えることにより、完全列

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_\gamma, \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_\gamma, C_n) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(H_\gamma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る。ここで、任意のアーベル群 G, H に対し $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G, H) = 0$ だから[(2)]、π_* は全射である。

3. このステップでは拡大類と Ext^1 の元の間の対応を用いる。条件 (c) 後半より、短完全列

$$0 \to C_n \to H_{\gamma+n} \to H_\gamma \to 0$$

があるから、これが $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_\gamma, C_n)$ の元を定める。π_* が全射だったから、あるアーベル群 $H_{\gamma+n+1}$ と可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & H_{\gamma+n+1} \arrow[r, two heads, "\pi_{\gamma+n+1}"] \arrow[d, "\delta"] & H_\gamma \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, hook] & H_{\gamma+n} \arrow[r, two heads, "\pi_{\gamma+n}"] & H_\gamma \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が存在する。蛇の補題より $\mathrm{Ker}(\delta) \cong \mathrm{Ker}(\pi) = p^n\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ と $\mathrm{Coker}(\delta) = 0$ が成り立ち、後者より δ は全射であることに注意する。

4. $H_{\gamma+n+1}$ が p 群であることを示す。$x \in H_{\gamma+n+1}$ とする。H_γ が p 群であることより、ある整数 $k \geq 1$ が存在して $p^k \pi_{\gamma+n+1}(x) = 0$ が成り立つ。よって $p^k x \in \mathrm{Ker}(\pi_{\gamma+n+1}) = \mathrm{Im}(i) \cong \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ だから、$p^{k+n+1} x = 0$ である。

5. $C_{n+1} := \mathrm{Im}(i)$ とおくと、C_{n+1} は p^{n+1} 次巡回群だから、$C_{n+1} = p^\gamma H_{\gamma+n+1}$ (条件 (c) 前半) を示せば、上側の短完全列より条件 (c) 後半が成り立つ。

 証明: ($\subset$ 側) C_{n+1} の生成元を g としたとき、$g \in p^\gamma H_{\gamma+n+1}$ を示せばよい。 $g \in C_{n+1} = \mathrm{Ker}(\pi_{\gamma+n+1})$ だから $\pi_{\gamma+n}(\delta(g)) = 0$、すなわち $\delta(g) \in \mathrm{Ker}(\pi_{\gamma+n}) = C_n = p^\gamma H_{\gamma+n}$ が成り立つ。そこで、任意の順序数 $\beta \leq \gamma$ に対して $\delta^{-1}(p^\beta H_{\gamma+n}) \subset p^\beta H_{\gamma+n+1}$ が成り立つことを β に関する超限帰納法で示す。 そうすれば、$g \in \delta^{-1}(p^\gamma H_{\gamma+n}) \subset p^\gamma H_{\gamma+n+1}$ が得られる。

 ($\beta = 0$ の場合) 明らか。

 ($\beta \Rightarrow \beta+1$) $\delta^{-1}(p^\beta H_{\gamma+n}) \subset p^\beta H_{\gamma+n+1}$ が成り立つと仮定する。

 1. $x \in \delta^{-1}(p^{\beta+1} H_{\gamma+n})$ とすると、$\delta(x) \in p^{\beta+1} H_{\gamma+n}$ だから、ある $y \in \delta^{-1}(p^\beta H_{\gamma+n})$ が存在して $\delta(x) = p\delta(y)$ が成り立つ。
 2. これより $x - py \in \mathrm{Ker}(\delta)$ である。 ここで、i が同型 $p^n\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} = \mathrm{Ker}(\pi) \cong \mathrm{Ker}(\delta)$ を誘導していたから、ある整数 $1 \leq k < p$ が存在して $x = p(y + p^n kg)$ が成り立つ。
 3. $\delta(g) \in p^\gamma H_{\gamma+n} \subset p^\beta H_{\gamma+n}$ だから $g \in \delta^{-1}(p^\beta H_{\gamma+n})$ である。 帰納法の仮定より g と y はともに $p^\beta H_{\gamma+n+1}$ に含まれる。ゆえに $x = p(y + p^n kg) \in p(p^\beta H_{\gamma+n+1}) = p^{\beta+1} H_{\gamma+n+1}$ が成り立つ。

 (極限順序数 β の場合) β を極限順序数とし、任意の $\beta' < \beta$ に対して $\delta^{-1}(p^{\beta'} H_{\gamma+n}) \subset p^{\beta'} H_{\gamma+n+1}$ が成り立つと仮定する。 このとき、

$$\delta^{-1}(p^\beta H_{\gamma+n}) = \bigcap_{\beta'<\beta} \delta^{-1}\left(p^{\beta'} H_{\gamma+n}\right) \subset \bigcap_{\beta'<\beta} p^{\beta'} H_{\gamma+n+1} = p^\beta H_{\gamma+n+1}$$

 である。

 ($\supset$ 側) 補題 3.7 より $\pi_{\gamma+n+1}(p^\gamma H_{\gamma+n+1}) \subset p^\gamma H_\gamma = 0$ だから $p^\gamma H_{\gamma+n+1} \subset \mathrm{Ker}(\pi_{\gamma+n+1}) = C_{n+1}$ となる。 □

6. 最後に条件 (a) と (b) を示す。3 の最後で述べたことより、それには $\mathrm{Ker}(\delta) = p^{\gamma+n} H_{\gamma+n+1}$ を示せばよい。

 証明: ($\subset$ 側) $x \in \mathrm{Ker}(\delta)$ とする。 上でみたように $\mathrm{Ker}(\delta) \cong \mathrm{Ker}(\pi) = p^n\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ だから、ある $y \in C_{n+1}$ が存在して $x = p^n y$ が成り立つ。 4 で $C_{n+1} = p^\gamma H_{\gamma+n+1}$ を示したから、$x \in p^n(p^\gamma H_{\gamma+n+1}) = p^{\gamma+n} H_{\gamma+n+1}$ である。

 ($\supset$ 側) 補題 3.7 より $\delta(p^{\gamma+n} H_{\gamma+n+1}) \subset p^{\gamma+n} H_{\gamma+n} = 0$ となる。 □

□

(1)段落 2.13 を読んだ方向けに説明すれば、この条件は H_α の被約性に関連している。実際、長さ λ のアーベル p 群 G に対して $p^\lambda G = 0$ が成り立てば G は被約となる。これはアーベル群の可除部分群と被約部分群への一意的な分解と、可除群の長さが 0 であることを用いれば分かる。

(2)これは、自由アーベル群の任意の部分群が再び自由アーベル群であるという事実 (非自明) を用いれば、任意のアーベル群 G に対して $\mathrm{id}_G : G \to G$ から自由アーベル群の普遍性により定まる写像 $\varphi : \mathbb{Z}^{\oplus G} \to G$ の kernel が自由となり、$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathbb{Z}^{\oplus G} \to G$ が G の projective resolution を与えるため、これを用いて Ext を計算すれば分かる。