Universal Fibration

Re-menal

2023 年 11 月 4 日

概要

本文書では、HTT 3.3.2 節 “Universal Fibrations” の内容を解説する。最初に 1 節にて後で用いる (un)straightening 関手の基本的性質をまとめ、2 節にて universal Cartesian fibration の構成と Cartesian fibration の分類定理、3 節にて universal right fibration の構成と right fibration の分類定理、そして universal right fibration の簡潔な表示について述べる。

目次

宇宙の固定と記号

非可算な Grothendieck 宇宙の列 $\mathbb{U} \subsetneq \mathbb{V}$ を固定する。

- $\mathbb{U}$ に属する集合を**小さい集合、small な集合** (small set) という。
- $\mathbb{V} \setminus \mathbb{U}$ に属する集合を**大きい集合** (large set) という。
- $\mathbb{V}$ に属する集合を **$\mathbb{V}$-small な集合** ($\mathbb{V}$-small set) という。
- $\mathbb{V}$ に属さない集合を**非常に大きな集合** (very large set) という。

記法 0.1.
- 小さい（resp. 大きい）印付き単体的集合全体のなす圏を $\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}}$ (resp. $\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$) と書く。
- 断らない限り、sSet^+ は $\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$ を意味する。
- 小さい ∞-圏全体のなす大きい ∞-圏を $\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ と書く。
- 小さい Kan 複体全体のなす大きい ∞-圏を $\mathcal{S}$ と書く。

1 straightening 関手

1. まず、次の定理が HTT 3.2 節の主定理である。

定理 1.1 (HTT 定理 3.2.0.1)**.** S を単体的集合、$\mathcal{C}$ を単体的圏、$\phi : \mathfrak{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を単体的圏の関手とする。このとき、随伴

$$(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})_{/S} \underset{\mathrm{Un}^+_\phi}{\overset{\mathrm{St}^+_\phi}{\rightleftarrows}} (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathcal{C}}$$

で次の 2 条件をみたすものが存在する。

(1) 関手 $(\mathrm{St}^+_\phi, \mathrm{Un}^+_\phi)$ は Cartesian モデル構造 $(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})_{/S}$ と射影的モデル構造 $(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathcal{C}}$ の間の Quillen 随伴を定める。

(2) ϕ が単体的圏の同値なら、$(\mathrm{St}^+_\phi, \mathrm{Un}^+_\phi)$ は Quillen 同値である。

概略.
1. 関手 St^+_ϕ は HTT 3.2.1 節冒頭で定義されている。
2. HTT 命題 3.2.1.4 (1) で St^+_ϕ が余極限を保つことが触れられ（証明は省かれている）、HTT 系 3.2.1.5 にて随伴関手定理を適用することで St^+_ϕ の右随伴 Un^+_ϕ の存在が導かれる[*1]。
3. 対 $(\mathrm{St}^+_\phi, \mathrm{Un}^+_\phi)$ が Quillen 随伴であることは HTT 3.2.1 節においてなされる（HTT 系 3.2.1.16 にて完了）。
4. 定理の (2) の証明は HTT 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 節にかけてなされる。 □

2. St^+_ϕ を **straightening 関手** (straightening functor)、Un^+_ϕ を **unstraightening 関手** (unstraightening functor) と呼ぶ。次の命題は、これらの関手の base change との整合性を主張する。

命題 1.2 (HTT 命題 3.2.1.4 (2), (3))**.** S を単体的集合、$\mathcal{C}$ を単体的圏、$\phi : \mathfrak{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を単体的関手とする。このとき、straightening 関手 St^+_ϕ は次の性質をみたす。

(1) $p : S' \to S$ を単体的集合の射とし、$p_* : (\mathrm{sSet}^+)_{/S'} \to (\mathrm{sSet}^+)_{/S}$ を p との後合成により定まる関手とする。このとき、自然同型 $\mathrm{St}^+_\phi \circ p_* \cong \mathrm{St}^+_{\phi\circ\mathfrak{C}[p]}$ がある。

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[r, "\mathrm{St}^+_\phi"] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S'} \arrow[u, "p_*"] \arrow[ur, "\mathrm{St}^+_{\phi\circ\mathfrak{C}[p]}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong", near start, shift left=3]
\end{tikzcd}$$

(2) $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を単体的関手とし、π との前合成による定まる関手 $\pi^* : (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'} \to (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}}$ の左随伴を $\pi_! : (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \to (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'}$ とする。このとき、自然同型 $\mathrm{St}_{\pi^{\mathrm{op}}\circ\phi} \cong \pi_! \circ \mathrm{St}^+_\phi$ がある。

[*1] ただし、HTT 系 3.2.1.5 の証明の最後には "Alternatively, one can construct Un^+_ϕ directly; we leave the details to the reader." と書かれている。

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'} \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[ur, "\mathrm{St}^+_{\pi^{\mathrm{op}}\circ\phi}"] \arrow[r, "\mathrm{St}^+_\phi"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \arrow[u, "\pi_!"'] \arrow[ul, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

> **概略.** HTT 命題 3.2.1.4 の直前には “The following formal properties of the straightening functor follow immediately from the definition” と書かれている。未確認。 □

命題 1.3. S を単体的集合、$\mathcal{C}$ を単体的圏、$\phi : \mathfrak{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を単体的関手とする。このとき、unstraightening 関手 Un^+_ϕ は次の性質をみたす。

(1) $p : S' \to S$ を単体的集合の射とし、$p^! : (\mathrm{sSet}^+)_{/S'} \to (\mathrm{sSet}^+)_{/S}$ を p との pullback により定まる関手とする。このとき、自然同型 $p^! \circ \mathrm{Un}^+_\phi \cong \mathrm{Un}^+_{\phi\circ\mathfrak{C}[p]}$ がある。

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[d, "p^!"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_\phi"'] \arrow[dl, "\mathrm{Un}^+_{\phi\circ\mathfrak{C}[p]}"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S'} &
\end{tikzcd}
$$

(2) $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を単体的関手とし、$\pi^* : (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'} \to (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}}$ を π との前合成による定まる関手とする。このとき、自然同型 $\mathrm{Un}_{\pi^{\mathrm{op}}\circ\phi} \cong \mathrm{Un}^+_\phi \circ \pi^*$ がある。

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'} \arrow[dl, "\mathrm{Un}^+_{\pi^{\mathrm{op}}\circ\phi}"'] \arrow[d, "\pi^*"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[ur, phantom, "\cong"] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_\phi"]
\end{tikzcd}
$$

> **証明.** 命題 1.2 において右随伴を考えればよい。 □

系 1.4. $p : S' \to S$ を単体的集合の射、$\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を単体的圏の関手、$\phi : \mathfrak{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と $\phi' : \mathfrak{C}[S'] \to \mathcal{C}'^{\mathrm{op}}$ を単体的関手とする。このとき、図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[S'] \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\mathfrak{C}[p]"'] & \mathcal{C}'^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\pi^{\mathrm{op}}"] \\
\mathfrak{C}[S] \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}
$$

が可換なら、自然同型 $\mathrm{St}^+_\phi \circ p^* \cong \pi_! \circ \mathrm{St}^+_{\phi'}$ と $p_! \circ \mathrm{Un}^+_\phi \cong \mathrm{Un}^+_{\phi'} \circ \pi^*$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[r, shift left, "\mathrm{St}^+_\phi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, shift left, "p^!"] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Un}^+_\phi"] \arrow[d, shift left, "\pi^*"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S'} \arrow[r, shift left, "\mathrm{St}^+_{\phi'}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[u, shift left, "p_*"] \arrow[u, phantom, "\dashv"] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}'} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Un}^+_{\phi'}"] \arrow[u, shift left, "\pi_!"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}$$

証明. 命題 1.2 と命題 1.3 を組み合わせればよい。 □

3. $S = \Delta^0$, $\mathcal{C} = \mathfrak{C}[\Delta^0]$, $\phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}[\Delta^0]}$ のとき、$\mathrm{St}^+_{\Delta^0}$ と $\mathrm{Un}^+_{\Delta^0}$ は関手 $\mathrm{sSet}^+ \to \mathrm{sSet}^+$ とみなせる。$T \coloneqq \mathrm{St}^+_{\Delta^0}$, $U \coloneqq \mathrm{Un}^+_{\Delta^0}$ とおくと、次が成り立つ（証明はしない）。

命題 1.5 (HTT 命題 3.2.1.14)**.** 任意の $M \in \mathrm{sSet}^+$ に対して、M について自然な sSet^+ における weak equivalence $T(M) \to M$ が存在する。

2 universal Cartesian fibration

4. まず、universal Cartesian fibration を構成する。$\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ は単体的圏 $\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)} = (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^\circ$ の homotopy coherent nerve として定義された。特に、包含 $\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)} \hookrightarrow \mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$ は射影的モデル構造における fibrant 対象 $\mathcal{F} \in (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}}$ とみなせる。

証明.
1. HTT 定義 A.3.3.1 と HTT 命題 A.3.3.2 より、射影的モデル構造 $(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}}$ の対象 F が fibrant $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathcal{C} \in \mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}$ に対し $F(\mathcal{C}) \to 1$ が $\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$ における fibration.
2. よって、言いたいことは任意の $\mathcal{C} \in \mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)} = (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^\circ$ が $\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$ において fibrant であることだが、$(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^\circ$ は fibrant-cofibrant 対象を集めてきているから明らか。 □

5. $\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ は $\mathbb{V}$-small だから、定理 1.1 が適用できる。ϕ として随伴 $\mathfrak{C} \dashv \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}$ の counit の反転 $\mathfrak{C}[\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}] \to (\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)})^{\mathrm{op}}$ をとり、この $\mathcal{F}$ を $\mathrm{Un}^+_{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}}$ で移せば、Cartesian モデル構造の fibrant 対象

$$(q : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}) \in (\mathrm{sSet}^+)_{/\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}}$$

を得る。この q を **universal Cartesian fibration** という。

命題 2.1. 単体的集合 S と射 $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ に対し、Cartesian fibration の同型

$$S \times_{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}} \mathcal{Z} \cong \mathrm{Un}^+_S(\mathcal{F} \circ \phi^{\mathrm{op}} \circ \mathfrak{C}[f]^{\mathrm{op}})$$

が存在する。

証明. 単体的圏の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[S] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathfrak{C}[S]}"] \arrow[d, "\mathfrak{C}[f]"'] & (\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\pi^{\mathrm{op}}\circ\mathfrak{C}[f]^{\mathrm{op}}"] \\
\mathfrak{C}[\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}] \arrow[r, "\phi"'] & (\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)})^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}$$

に系 1.4 を適用すれば、次の図式は up to natural isomorphism で可換となる。

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}} \arrow[d, "f^!"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_{\phi}"'] \arrow[d, "-\circ\phi^{\mathrm{op}}\circ\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_{S}"']
\end{tikzcd}$$

上の図式において $\mathcal{F} \in (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}}$ の行き先を考えれば、主張の同型 $f^!(q) \cong \mathrm{Un}^+_S(\mathcal{F}\circ\phi^{\mathrm{op}}\circ\mathfrak{C}[f]^{\mathrm{op}})$ が得られる。 $\square$

6. 上の命題の $S = \Delta^0$ の場合を考えると、1 節の段落 3 の記号 $U = \mathrm{Un}^+_{\Delta^0}$ を用いれば、q の ∞-圏 $\mathcal{C} \in \mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ におけるファイバーは $U(\mathcal{C})$ と表せる。

$$\begin{tikzcd}
U(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\
\{\mathcal{C}\} \arrow[r] & \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}
\end{tikzcd}$$

すると、命題 1.5 より ∞-圏の同値 $\mathcal{C} \to U(\mathcal{C})$ がある。このことから、q は各 $\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ の対象に対して付随する ∞-圏を与える Cartesian fibration と思える。

命題 2.2. small な単体的集合 S と射 $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ に対し、pullback $S \times_{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}} \mathcal{Z}$ は small。

証明.
1. S が small だから、Quillen 同値

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})_{/S} \arrow[r, shift left, "\mathrm{St}^+_S"] & (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Un}^+_S"]
\end{tikzcd}$$

がある。
2. f の各点の像は small だから、$\mathcal{F}\circ\phi^{\mathrm{op}}\circ\mathfrak{C}[f]^{\mathrm{op}} \in (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}}$ である。よって、これの $\mathrm{Un}^+_{\phi\circ\mathfrak{C}[f]}$ による移り先は small だから、命題 2.1 より主張が成り立つ。 $\square$

定義 2.3. $p : X \to S$ を Cartesian fibration とする。関手 $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が p を**分類する** (f classifies p) とは、Cartesian fibration の同値 $X \to S \times_{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}} \mathcal{Z}$ が存在することをいう。

定理 2.4. $p : X \to S$ を小さいとは限らない単体的集合の間の Cartesian fibration とする。このとき次の (1) と (2) は同値。

(1) p は $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ により分類される。
(2) 各 $s \in S$ に対し、ファイバー X_s は essentially small である。

証明（未完）. (2) $\Rightarrow$ (1) を示す。
Step 1:
1. Quillen 同値

$$(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})_{/S} \underset{\mathrm{Un}^+_S}{\overset{\mathrm{St}^+_S}{\rightleftarrows}} (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}}$$

があるから、$(\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})_{/S}$ において、合成

$$p \xrightarrow{unit} \mathrm{Un}^+_S(\mathrm{St}^+_S(p)) \xrightarrow{\mathrm{Un}^+_S(j_{\mathrm{St}^+_S(p)})} \mathrm{Un}^+_S(P(\mathrm{St}^+_S(p)))$$

は weak equivalence である。
2. $F \coloneqq P(\mathrm{St}^+_S(p)) : \mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}} \to \mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}}$ とおく。**fibrant 対象** $G \in (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}}$ **と weak equivalence** $\alpha : F \to G$ **で、**$G = (\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}} \xrightarrow{h} (\mathrm{sSet}^+_{\mathbb{U}})^{\circ} \hookrightarrow \mathrm{sSet}^+_{\mathbb{V}})$ **なるものが存在すると仮定する。**

> この事実は未証明。

Step 2:
3. $f' \coloneqq \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(h^{\mathrm{op}}) : \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(\mathfrak{C}[S]) \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ とおき、$f \coloneqq (S \xrightarrow{\eta_S} \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(\mathfrak{C}[S]) \xrightarrow{f'} \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)})$ と定める。ここで、 η, ε は随伴 $\mathfrak{C} \dashv \mathrm{N}^{\mathrm{hc}}$ の unit, counit である。
4. すると、次の図式は up to natural isomorphism で可換である。

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}} \arrow[d, "f'^!"] \arrow[dd, bend right=60, "f^!"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_{\phi}"'] \arrow[d, "h^*"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/\mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(\mathfrak{C}[S])} \arrow[d, "\eta^!_S"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}} \arrow[l, "\mathrm{Un}^+_{\eta_{\mathfrak{C}[S]}}"'] \arrow[dl, "\mathrm{Un}^+_S"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} &
\end{tikzcd}$$

ここで、四角の部分は図式

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[\mathrm{N}^{\mathrm{hc}}(\mathfrak{C}[S])] \arrow[r, "{\mathfrak{C}[f]}"] \arrow[d, "\eta_{\mathfrak{C}[S]}"'] & \mathfrak{C}[\mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}] \arrow[r, "\phi"] & (\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)})^{\mathrm{op}} \\
\mathfrak{C}[S] \arrow[urr, "h^{\mathrm{op}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

の可換性から、三角の部分は $\varepsilon_{\mathfrak{C}[S]} \circ \mathfrak{C}[\eta_S] = \mathrm{id}$ から従う。

5. よって、4 の図式の $\mathcal{F} \in (\mathrm{sSet}^+)^{\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}}$ の行き先を考えれば、$f^!(q) \cong \mathrm{Un}^+_S(G)$ がわかる。

Step 3:

6. Un^+_S は右 Quillen 関手だから、fibrant 対象の間の weak equivalence を weak equivalence に移す。よって $\mathrm{Un}^+_S(\alpha)$ は weak equivalence である。

7. 以上より、$(\mathrm{sSet}^+)_{/S}$ において

$$p \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Un}^+_S(F) \xrightarrow{\mathrm{Un}^+_S(\alpha)} \mathrm{Un}^+_S(G) \cong f^!(q)$$

となり、p が f で分類されることが言えた。 □

考察. $s : \Delta^0 \to S$ を考えると、

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{sSet}^+)_{/S} \arrow[r, "\mathrm{St}^+_S"] \arrow[d, "s^!"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}} \arrow[d, "(\mathfrak{C}[s]^{\mathrm{op}})^*"] \\
(\mathrm{sSet}^+)_{/\Delta^0} \arrow[r, "T"'] & (\mathrm{sSet}^+)^{\mathfrak{C}[\Delta^0]^{\mathrm{op}}}
\end{tikzcd}$$

は up to natural isomorphism で可換。よって sSet^+ において $\mathrm{St}^+_S(p)(s) \cong T(X_s)$ が成り立つ。

HTT 命題 3.2.1.14 より sSet^+ において $T(X_s) \simeq X_s$ だが、これが 2 の事実の証明に使える？

3 universal right fibration

1. Kan 複体のなす単体的圏 $\mathcal{K}\mathrm{an}$ は $\mathcal{C}\mathrm{at}^{\Delta}_{(\infty,1)}$ の充満単体的部分圏である。よって、空間の ∞-圏 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ の充満単体的部分集合とみなせる。

2. このとき、pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}^0 \arrow[r] \arrow[d, "q^0"'] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\
\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \arrow[r, hook] & \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}
\end{tikzcd}$$

で定まる射 q^0 を **universal right fibration** という。

命題 3.1. 上で定めた Cartesian fibration q^0 は right fibration である。

証明.

Step 1: q^0 の各ファイバーが Kan 複体であることを示す。

1. 2 節の段落 6 より、q^0 の各ファイバーは Kan 複体と同値である。

2. 一般に、∞-圏 $\mathcal{C}$ が Kan 複体 K と ∞-圏同値なら、$\mathcal{C}$ も Kan 複体である。

> **証明.** ∞-圏同値 $\mathcal{C} \to K$ はホモトピー圏の圏同値 $\mathrm{h}\mathcal{C} \to \mathrm{h}K$ を誘導する。$\mathrm{h}K$ の全ての射は同型射だから、$\mathrm{h}\mathcal{C}$ の全ての射も同型射である。よって $\mathcal{C}$ は Kan 複体である。 $\square$

Step 2: 一般に、各ファイバーが Kan 複体である Cartesian fibration $p : X \to S$ は right fibration であることを示す（HTT 命題 2.4.2.4）。

1. p は inner fibration だから、各 $n \geq 2$ に対し任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_n \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

がリフトを持てばよい。

2. ここで、もし $\overline{f}|_{\Delta^{\{n-1,n\}}} : \Delta^1 \to X$ が p-Cartesian なら、（Cartesian morphism の定義より明らかに）上の図式はリフトを持つ。よって、X に任意の射が p-Cartesian だと示せば十分である。

3. $e : x \to y$ を X の射とする。p は Cartesian fibration だから、X の p-Cartesian な射 $e' : x' \to y$ で $p(e)$ のリフトであるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} \Lambda^1_0 \arrow[r, "y"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^1 \arrow[r, "p(e)"'] \arrow[ur, dashed, "e'"] & S \end{tikzcd}$$

4. e と e' は ∞-圏 $X_{/y} \times_{S_{/p(y)}} \{p(e)\}$ の対象とみなせる。このとき、定義より、e が p-Cartesian であることと e が $X_{/y} \times_{S_{/p(y)}} \{p(e)\}$ の終対象であることは同値。したがって、**終対象の一意性**より、e と e' が $X_{/y} \times_{S_{/p(y)}} \{p(e)\}$ において同型なら e は p-Cartesian となる。

5. 実際に同型であることを示す。e' は p-Cartesian だから、次の可換図式のリフト σ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \Delta^{\{1,2\}} \arrow[d, hook] \arrow[dr, bend left, "e'"] & \\ \Lambda^2_2 \arrow[r, "(\widetilde{e}, e, -)"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^2 \arrow[r, "s_0 p(e)"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, dashed, "d"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma"] & y \\ & x' \arrow[ur, "e'"'] & \end{tikzcd}$$

6. $d \coloneqq \sigma|_{\Delta^{\{0,1\}}}$ とおくと $p(d) = \mathrm{id}_{p(x)}$ をみたすから、d はファイバー $X_{p(x)}$ に属する。よって、いま $X_{p(x)}$ は Kan 複体だから、d は X における同型射である。
7. このことから、σ を ∞-圏 $X_{/y} \times_{S_{/p(y)}} \{p(e)\}$ における射 $\sigma : e \to e'$ とみなすと、σ が同型射だとわかる。

証明. 同型 $((\Lambda^n_0 \star \Delta^0) \amalg_{\Lambda^n_0} \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \star \Delta^0) \cong (\Lambda^{n+1}_0 \hookrightarrow \Delta^{n+1})$ と Joyal の拡張定理を用いることで簡単な diagram chase により証明できる。 □

□

定理 3.2. 各ファイバーが essentially small な Cartesian fibration $p : X \to S$ に対して、次の 3 条件は同値。

(1) p は right fibration。
(2) p を分類する任意の関手 $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が $f = (S \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)})$ と分解する。
(3) p を分類する関手 $f : S \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ が存在する。

証明.
(1) ⇒ (2):
1. $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が p を分類するとする。示すべきことは、任意の $s \in S$ に対して、合成 $\Delta^0 \xrightarrow{s} S \xrightarrow{f} \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が $\Delta^0 \xrightarrow{\exists} \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ と分解することである。
2. p は right fibration だから、p の s におけるファイバー X_s は Kan 複体である。

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

3. pullback をつなげると、次の図式が pullback となる。

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "f(s)"'] & \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)} \end{tikzcd}$$

これより、∞-圏 $f(s) \in \mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ は Kan 複体 X_s と同値になる。
4. Kan 複体と ∞-圏として同値な ∞-圏は Kan 複体だから、$f(s)$ は Kan 複体である。これは射 $\Delta^0 \xrightarrow{f(s)} \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が $\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ を通して分解することを意味する。
(2) ⇒ (3):
1. p の各ファイバーが essentially small だから、定理 2.4 より p を分類する関手 $f : S \to \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)}$ が存在する。
2. 仮定より $f = (S \xrightarrow{f'} \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}^{\mathrm{op}}_{(\infty,1)})$ と分解する。このとき、pullback の普遍性より次の図式を可換にする射 $X \to \mathcal{Z}^0$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[d, "p"'] \arrow[rr, bend left] & \mathcal{Z}^0 \arrow[r] \arrow[d, "q^0"'] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\
S \arrow[r, "f'"'] & \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \arrow[r, hook] & \mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}
$$

3. 上の図式において、外側と右側の四角は pullback だから、左側の四角も pullback である。これは p が $f' : S \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ で分類されることを意味する。

(3) ⇒ (1): q^0 が right fibration であること（命題 3.1）を用いれば、簡単な diagram chase により直接 p が right fibration だと確かめられる。 □

3. ∞-圏 $\Delta^0 \in \mathcal{C}\mathrm{at}_{(\infty,1)}$ を $*$ とかく。2 節の段落 6 より、equivalence $* \xrightarrow{\simeq} U(*)$ がある。ここで、射 $* \xrightarrow{\simeq} U(*) \to \mathcal{Z}$ に対応する点を $*_{\mathcal{Z}}$ と書くと、$* \in \mathcal{S}$ より $*_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{Z}^0$ である。

補題 3.3 (HTT 命題 3.3.2.6)**.** $*_{\mathcal{Z}}$ は $\mathcal{Z}^0$ における終対象である。

証明（未完）.

Step 1: 単体的関手の拡張への還元。

1. 任意の $n \le 1$ と射 $f_0 : \partial\Delta^n \to \mathcal{Z}^0$ で $f_0|_{\Delta^{\{n\}}} = *_{\mathcal{Z}}$ なるものが拡張 $\Delta^n \to \mathcal{Z}^0$ を持てばよい。

2. ここで、$\partial\Delta^n \xrightarrow{f_0} \mathcal{Z}^0 \hookrightarrow \mathcal{Z}$ の拡張 $f : \Delta^n \to \mathcal{Z}$ があれば、この f は $\mathcal{Z}^0$ を通じて分解するから、このことを示せばよい。

3. 単体的圏 $\mathcal{D}$ を、$\mathcal{K}\mathrm{an}^{\mathrm{op}}$ を充満部分圏に含み、かつ追加で 1 つの対象 X を持ち、Hom が各 $K \in \mathcal{K}\mathrm{an}^{\mathrm{op}}$ に対し

$$
\mathcal{D}(K, X) = K, \qquad \mathcal{D}(X, X) = *, \qquad \mathcal{D}(X, K) = \emptyset
$$

で与えられるものとして定める。

4. すると、**射 $f_0 : \partial\Delta^n \to \mathcal{Z}^0$ を与えることは単体的関手 $F_0 : \mathfrak{C}[\partial\Delta^n \star \Delta^0] \to \mathcal{D}$ を与えることと同値であり、また f_0 を拡張する射 $f : \Delta^n \to \mathcal{Z}$ を与えることは F_0 を拡張する単体的関手 $F : \mathfrak{C}[\Delta^n \star \Delta^0]$ を与えることと同値である（なぜ？）。**以下、$\mathcal{C}_0 \coloneqq \mathfrak{C}[\partial\Delta^n \star \Delta^0]$, $\mathcal{C} \coloneqq \mathfrak{C}[\Delta^n \star \Delta^0]$ とおく。

Step 2: Hom の拡張への還元。

1. $(i, j) = (0, n)$, $(0, n+1)$ 以外に対しては、包含 $\mathcal{C}_0(\langle i \rangle, \langle j \rangle) \to \mathcal{C}(\langle i \rangle, \langle j \rangle)$ は同型である。

2. よって、拡張 F を定めるには、次の 2 つの拡張

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_0(\langle 0 \rangle, \langle n \rangle) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{D}(F_0\langle 0 \rangle, F_0\langle n \rangle) \\
\mathcal{C}(\langle 0 \rangle, \langle n \rangle) \arrow[ur, dashed, "j"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_0(\langle 0 \rangle, \langle n+1 \rangle) \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{D}(F_0\langle 0 \rangle, F_0\langle n+1 \rangle) \\
\mathcal{C}(\langle 0 \rangle, \langle n+1 \rangle) \arrow[ur, dashed, "j'"']
\end{tikzcd}
$$

であって、次の図式を可換にするものが存在すればよい。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\langle 0\rangle, \langle n\rangle) \times \mathcal{C}(\langle n\rangle, \langle n+1\rangle) \arrow[r] \arrow[d, "j \times F_0"'] & \mathcal{C}(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle) \arrow[d, "j'"] \\
\mathcal{D}(F_0\langle 0\rangle, F_0\langle n\rangle) \times \mathcal{D}(F_0\langle n\rangle, F_0\langle n+1\rangle) \arrow[r] & \mathcal{D}(F_0\langle 0\rangle, F_0\langle n+1\rangle)
\end{tikzcd}
$$

3. ここで、$\mathcal{C}(\langle n\rangle, \langle n+1\rangle) \cong \Delta^0$ であり、また、f_0 が $\langle n\rangle$ を $*_{\mathcal{Z}}$ に移すという仮定より、$\mathcal{D}(F_0\langle n\rangle, F_0\langle n+1\rangle)$ も Δ^0 と同型。

4. **このことから、j' を固定すると、2 における図式を可換にする j は一意に定まる（なぜ？）。**原文は "It follows that, for any fixed choice of j', there is a unique choice of j for which the above diagram commutes." である。

したがって、拡張 j' の存在を示せばよい。

Step 3: 証明の完了。

1. $\mathcal{D}(F_0\langle 0\rangle, F_0\langle n+1\rangle) = \mathcal{D}(F_0\langle 0\rangle, X) = F_0\langle 0\rangle$ は Kan 複体だから、包含 $\mathcal{C}_0(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle) \to \mathcal{C}(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle)$ が anodyne ならよい。

2. $\mathcal{C} \cong \mathfrak{C}[\Delta^{n+1}]$ の定義より、

$$\mathcal{C}(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle) \cong (\Delta^1)^n$$

と計算できる。また、$\mathcal{C}_0 \cong \mathfrak{C}[\Lambda^{n+1}_{n+1}]$ の場合、低次元での観察を一般化すれば、

$$\mathcal{C}_0(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle) \cong (\{0\} \times (\Delta^1)^{n-1}) \amalg_{\{0\} \times \partial(\Delta^1)^{n-1}} (\Delta^1 \times \partial(\Delta^1)^{n-1})$$

と計算できる。よって、包含 $\mathcal{C}_0(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle) \to \mathcal{C}(\langle 0\rangle, \langle n+1\rangle)$ は pushout-product

$$(\{0\} \hookrightarrow \Delta^1) \boxtimes (\partial(\Delta^1)^{n-1} \hookrightarrow (\Delta^1)^{n-1})$$

と同型である。

3. $\{0\} \hookrightarrow \Delta^1$ は anodyne だから、anodyne の pushout-product での安定性より、上の pushout-product は anodyne である。 □

定理 3.4. universal right fibration q^0 は right fibration $\mathcal{S}^{\mathrm{op}}_{/*} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ と同値である。

証明.

1. 点 $*_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{Z}^0$ は終対象だから、Kerodon 系 4.6.7.24 より $*_{\mathcal{Z}} : \Delta^0 \to \mathcal{Z}^0$ は right anodyne であり、したがって HTT 命題 4.1.2.1 よりこの射は反変モデル構造 $(\mathrm{sSet})_{/\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ における weak equivalence である。

2. また、$\mathrm{id}_* : \Delta^0 \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}_{/*}$ は $\mathcal{S}^{\mathrm{op}}_{/*}$ における終対象であるから、同様の議論により、この射は $(\mathrm{sSet})_{/\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ における weak equivalence である。

3. 以上より、$(\mathrm{sSet})_{/\mathcal{S}^{\mathrm{op}}}$ において q^0 と射影 $\mathcal{S}^{\mathrm{op}}_{/*} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$ は weak equivalent である。 □